

7

PARALELISMOS E PERPENDICULARIDADES

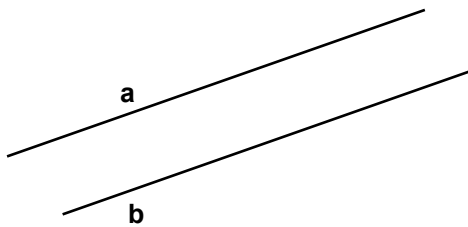
Neste capítulo estudam-se as rectas e os planos nas suas relações de paralelismo e de perpendicularidade, nas diferentes possibilidades: rectas com rectas, planos com planos e rectas com planos. Mostra-se também como se confirmam e se determinam relações de paralelismo e de perpendicularidade.

Sumário:

2. Os paralelismos no espaço
3. Paralelismos de resolução directa entre rectas
- 4 e 5. Paralelismos entre rectas de perfil
6. Paralelismos de resolução directa entre planos
7. Paralelismos entre planos de rampa
- 8 e 9. Plano paralelo a outro contendo um ponto dado
10. Paralelismos de resolução directa entre rectas e planos
11. Paralelismos entre rectas e o plano oblíquo
12. Paralelismos entre rectas e o plano de rampa
- 13 e 14. Paralelismos entre rectas e planos definidos por rectas
15. Paralelismos entre planos definidos por traços e planos definidos por rectas
- 16 e 17. Paralelismos entre planos definidos por rectas
18. As perpendicularidades no espaço
19. Perpendicularidades de resolução directa entre rectas e planos
20. Perpendicularidades entre o plano de rampa e a recta de perfil
21. Perpendicularidades de resolução directa entre rectas
22. Perpendicularidades entre rectas oblíquas
23. Perpendicularidades entre rectas de perfil
24. Perpendicularidades entre rectas oblíquas e de perfil
25. Perpendicularidades de resolução directa entre planos
26. Perpendicularidades entre planos de rampa
27. Perpendicularidades entre planos oblíquos
28. Perpendicularidades entre planos oblíquos e de rampa
29. Perpendicularidades entre rectas e planos definidos por rectas
30. Perpendicularidades entre planos definidos por traços e planos definidos por rectas
31. Perpendicularidades entre planos definidos por rectas
32. Perpendicularidades entre uma recta e duas rectas
- 33, 34 e 35. Exercícios

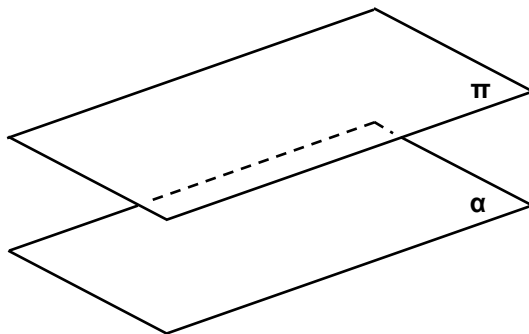
Os paralelismos no espaço

Nesta primeira parte do capítulo estudam-se paralelismos entre: duas rectas, dois planos, uma recta e um plano. Nos traçados que se apresentam nesta página é fácil verificar e compreender essas situações; contudo, nas projecções nem sempre se apresentam óbvias ou de resolução imediata.



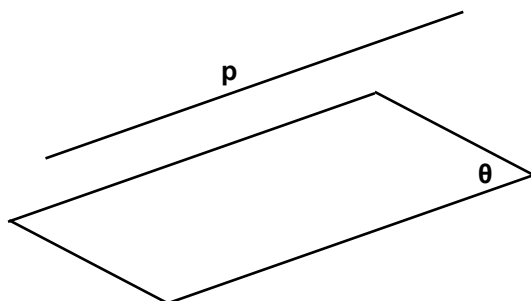
Paralelismo entre duas rectas

Duas rectas paralelas são rectas com a mesma direcção, pelo que são coplanares.



Paralelismo entre dois planos

Dois planos que não se intersectam são sempre paralelos.

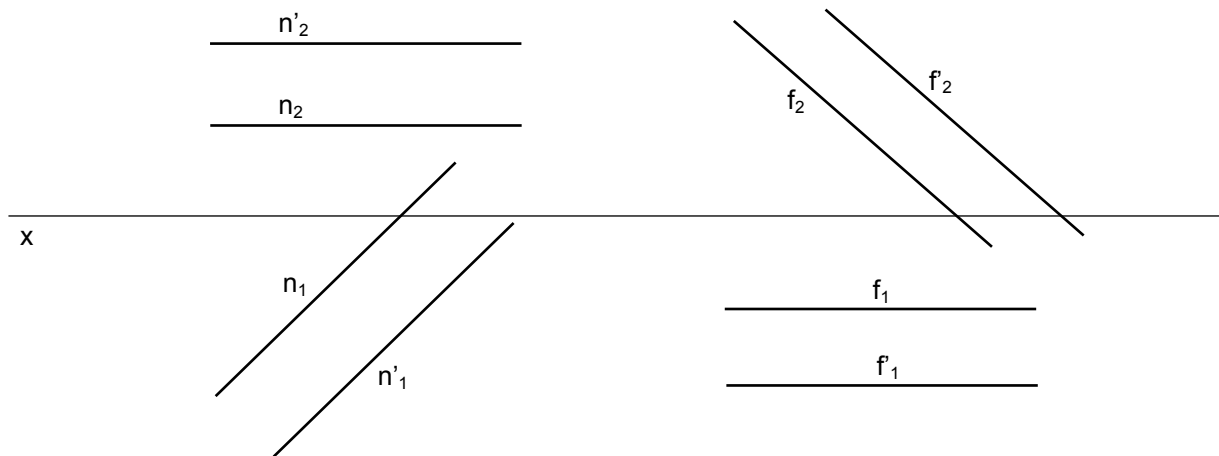


Paralelismo entre uma recta e um plano

Uma recta que não cruza um plano é paralela a esse plano.

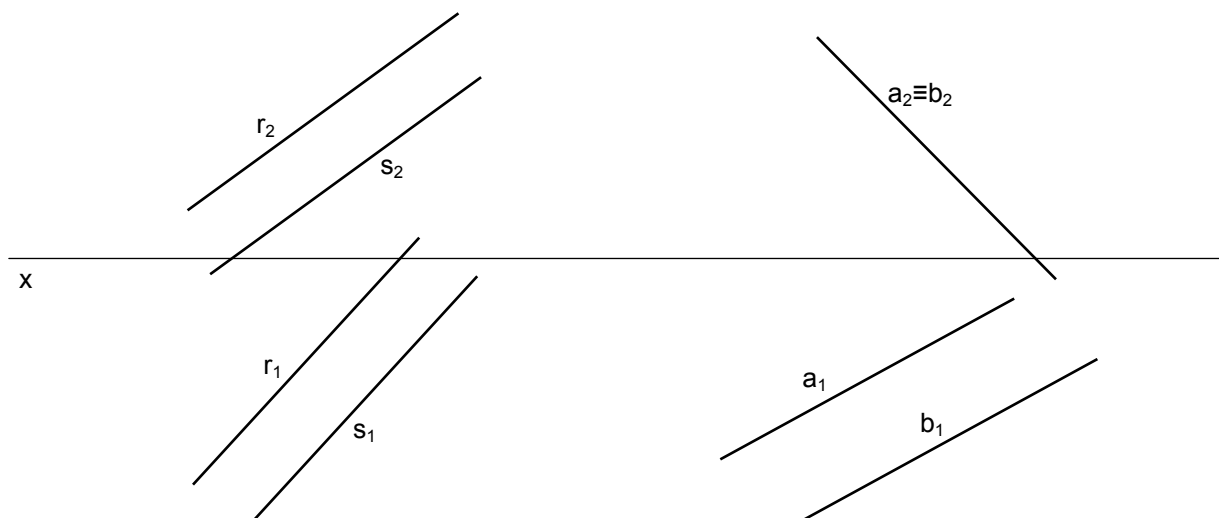
Paralelismos de resolução directa entre rectas

Duas rectas paralelas têm sempre as suas projecções homónimas paralelas; eventualmente, poderá haver coincidência numa das projecções. Obviamente, só rectas do mesmo tipo podem ser paralelas entre si. Não se apresentam aqui as rectas fronto-horizontal, de topo e vertical, já que duas rectas de cada um desses tipos são sempre paralelas.



Paralelismo entre rectas horizontais e entre rectas frontais

Duas rectas horizontais ou frontais são paralelas quando as suas projecções homónimas também o são. Se houver coincidência numa das projecções (como se vê no segundo exemplo de baixo) o paralelismo continua a ser válido.

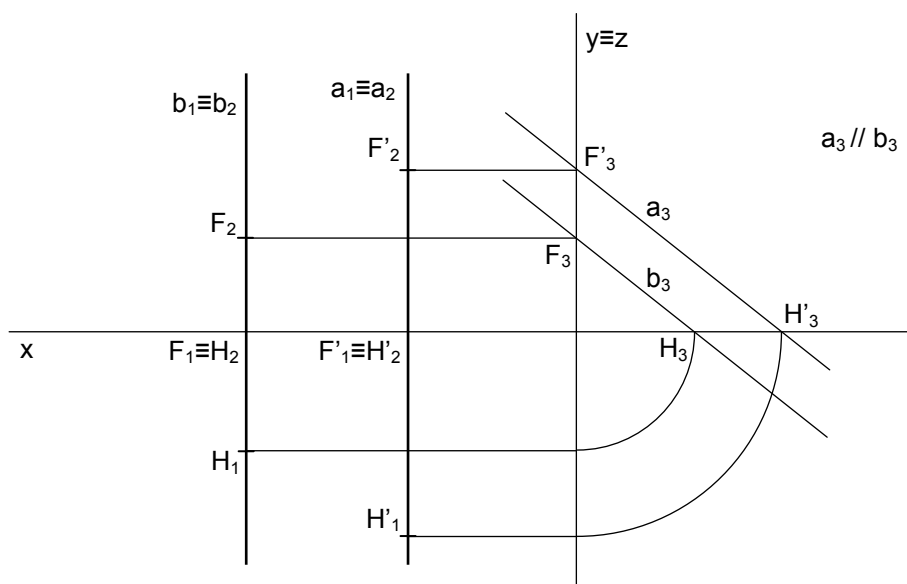


Paralelismo entre rectas oblíquas

Duas rectas oblíquas são paralelas quando as suas projecções homónimas são paralelas. Havendo coincidência numa das projecções, o paralelismo continua válido.

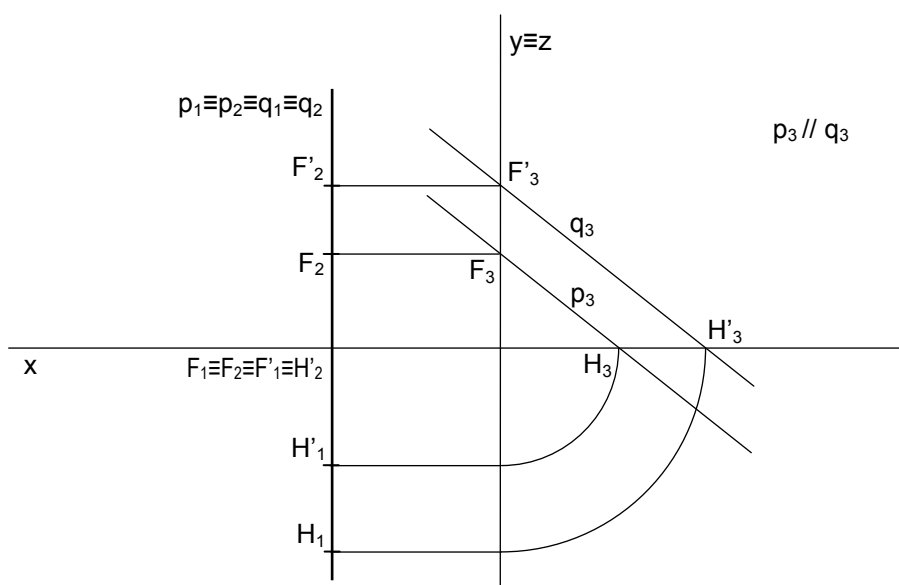
Paralelismos entre rectas de perfil

A regra que se aplica nas situações da página anterior não se aplica à recta de perfil. Pode-se representar rectas de perfil paralelas entre si, ou confirmar se o são, recorrendo às suas projecções laterais. Aqui exemplifica-se com rectas definidas pelos seus traços mas, obviamente, este processo também é válido para rectas definidas por outros pontos.



Paralelismo entre rectas de perfil com diferentes abcissas

Duas rectas de perfil paralelas têm projecções laterais paralelas ou, eventualmente, coincidentes, caso as medidas dos seus traços sejam iguais.

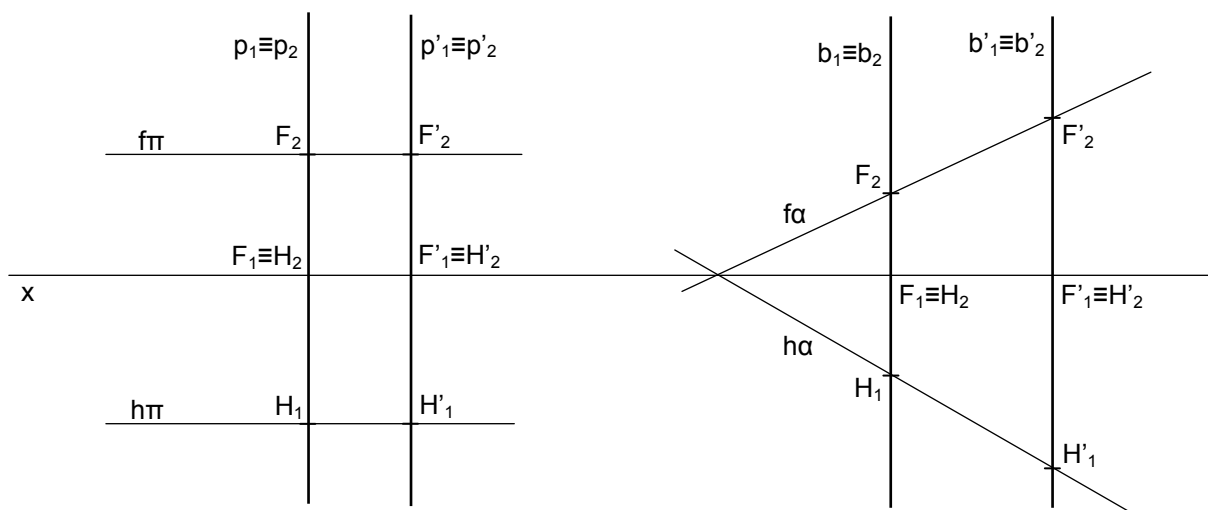


Paralelismo entre rectas de perfil com a mesma abcissa

No caso de as rectas de perfil possuírem o mesmo valor de abcissa (ou seja, terem projecções coincidentes) as projecções laterais permitem também confirmar se elas são paralelas ou não.

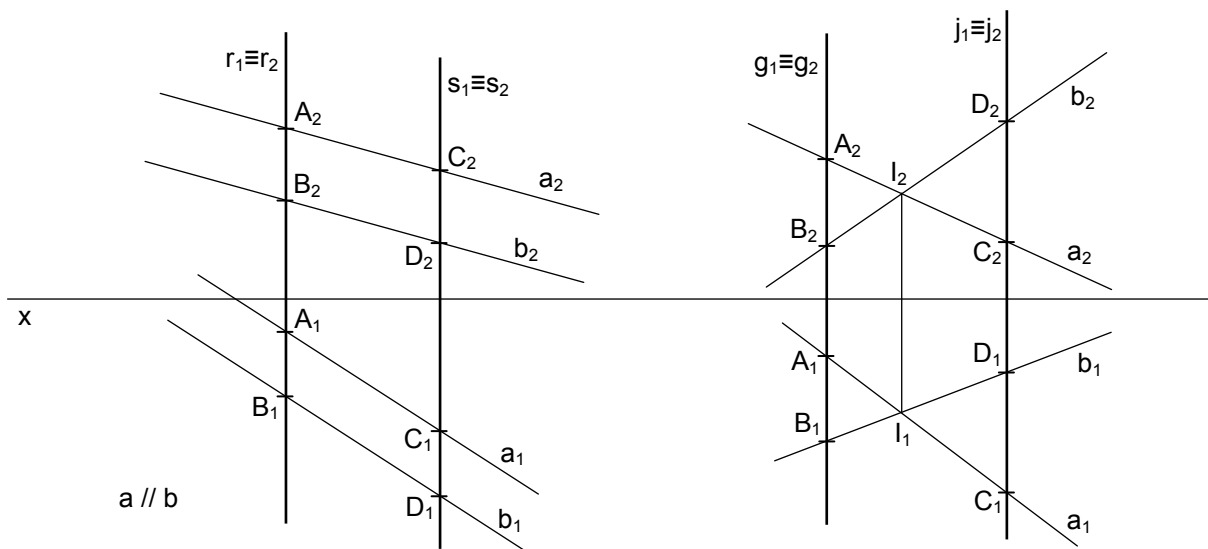
Nesta página confirma-se o paralelismo entre duas rectas de perfil recorrendo a traços de planos auxiliares, assim como a rectas paralelas ou concorrentes.

Para tal, pode-se ainda fazer uso dos métodos geométricos auxiliares: rebatimentos, rotações e mudanças de planos.



Confirmação do paralelismo entre rectas de perfil recorrendo aos traços dos planos

Para que duas rectas sejam paralelas têm de ser complanares. Aqui, para provar que as rectas de perfil são paralelas, representam-se os traços do plano a que pertencem: à esquerda, um plano de rampa; à direita, um plano oblíquo. No primeiro caso pode-se confirmar o paralelismo entre as rectas sem recorrer ao plano de rampa, caso se verifique que os traços da recta têm medidas iguais.

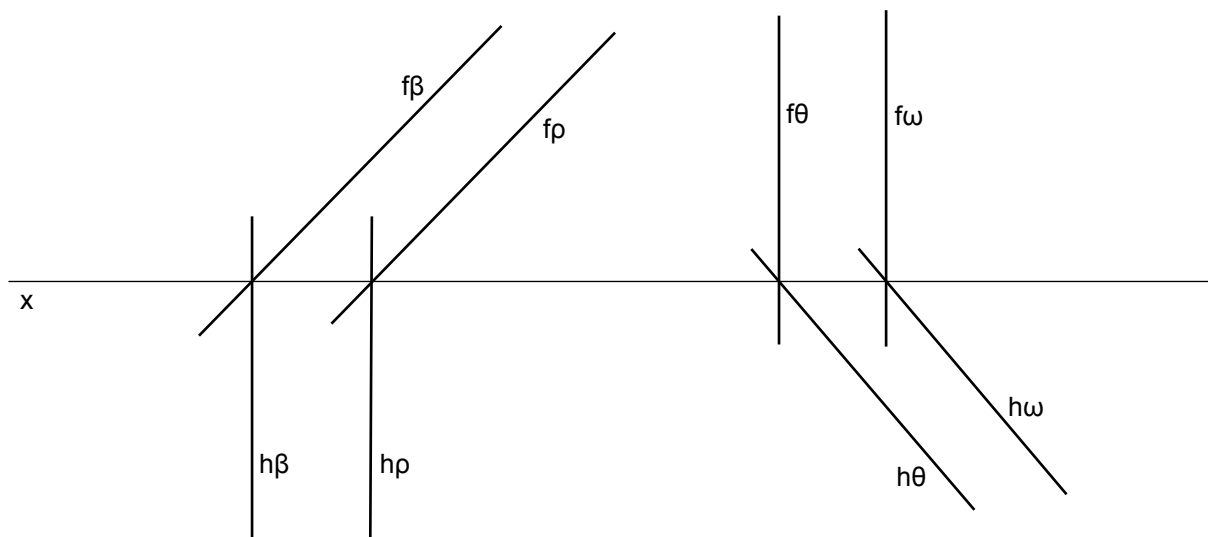


Confirmação do paralelismo entre rectas de perfil recorrendo a rectas auxiliares

Quando duas rectas de perfil estão definidas por dois pontos que não os traços, pode-se utilizar um processo simples para confirmar se são paralelas entre si ou não. O processo consiste em passar duas rectas pelos pontos. Se essas rectas forem paralelas ou concorrentes (ou seja, complanares) isso significa que as rectas de perfil são paralelas, mas se forem enviesadas as rectas dadas também serão enviesadas.

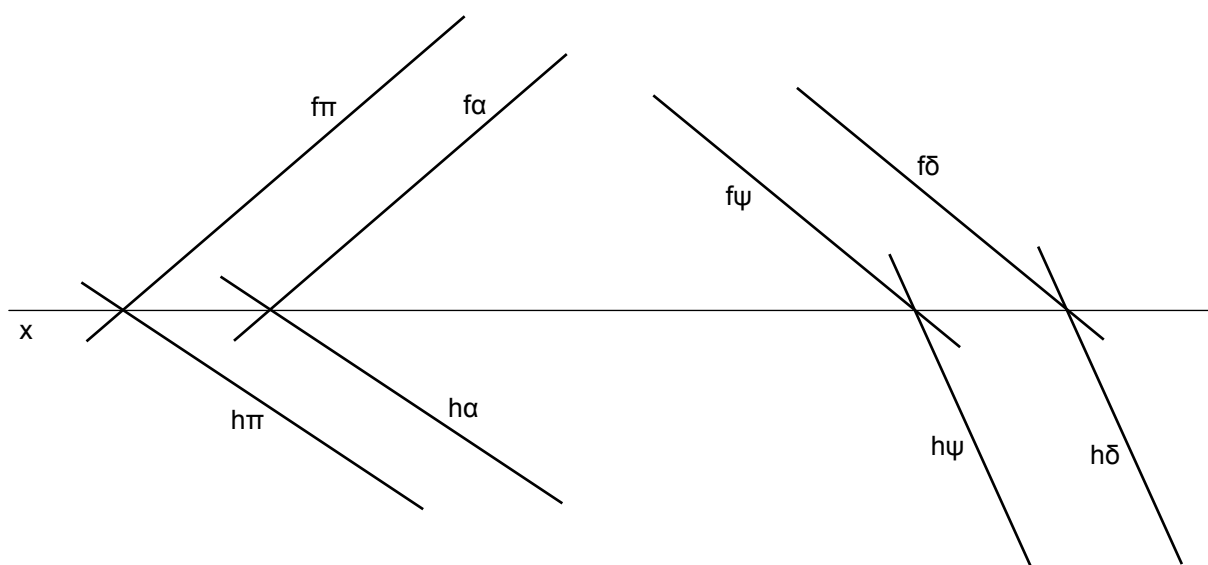
Paralelismos de resolução directa entre planos

Dois planos paralelos têm sempre os traços homónimos paralelos. Obviamente, só planos do mesmo tipo o podem ser. Dois planos horizontais, frontais ou de perfil são sempre paralelos entre si, pelo que esses casos não se apresentam aqui.



Paralelismo entre planos de topo e entre planos verticais

Para que dois planos de topo sejam paralelos é necessário que os seus traços frontais sejam paralelos, já que os horizontais o são sempre. Para que dois planos verticais sejam paralelos é necessário que os seus traços horizontais sejam paralelos, já que os frontais o são sempre.



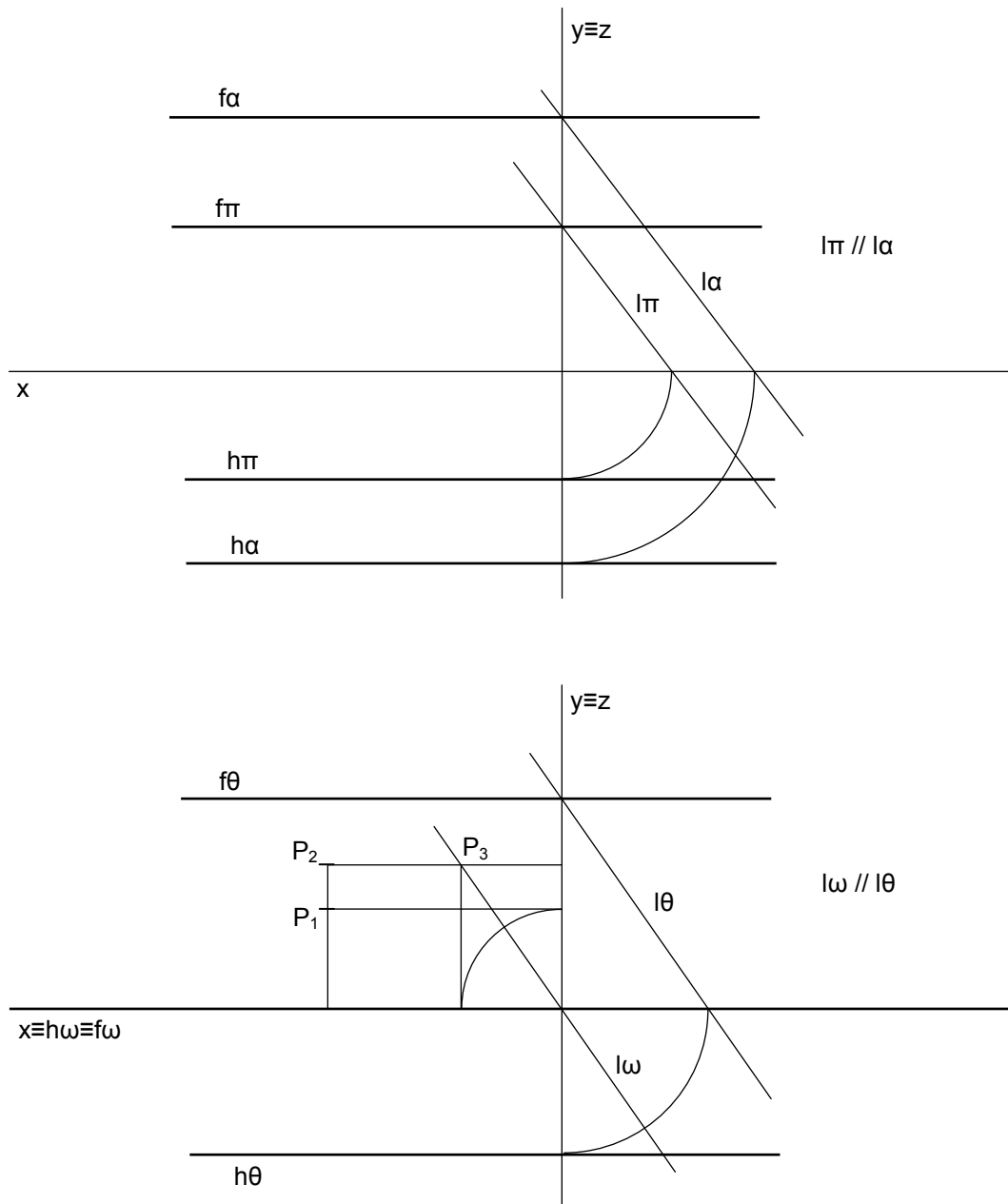
Paralelismo entre planos oblíquos

Para que dois planos oblíquos sejam paralelos é necessário que os seus traços homónimos sejam paralelos. Isso observa-se aqui em duas situações.

Paralelismos entre planos de rampa

A especificidade dos planos de rampa faz com que a posição dos seus traços, sempre paralelos ao eixo x , não seja suficiente para garantir o paralelismo entre dois planos. Aqui mostra-se como resolver o problema recorrendo aos traços laterais.

Outros processos se podem utilizar para confirmar ou determinar o paralelismo entre planos de rampa: rebatimentos, rotações e mudanças de planos.

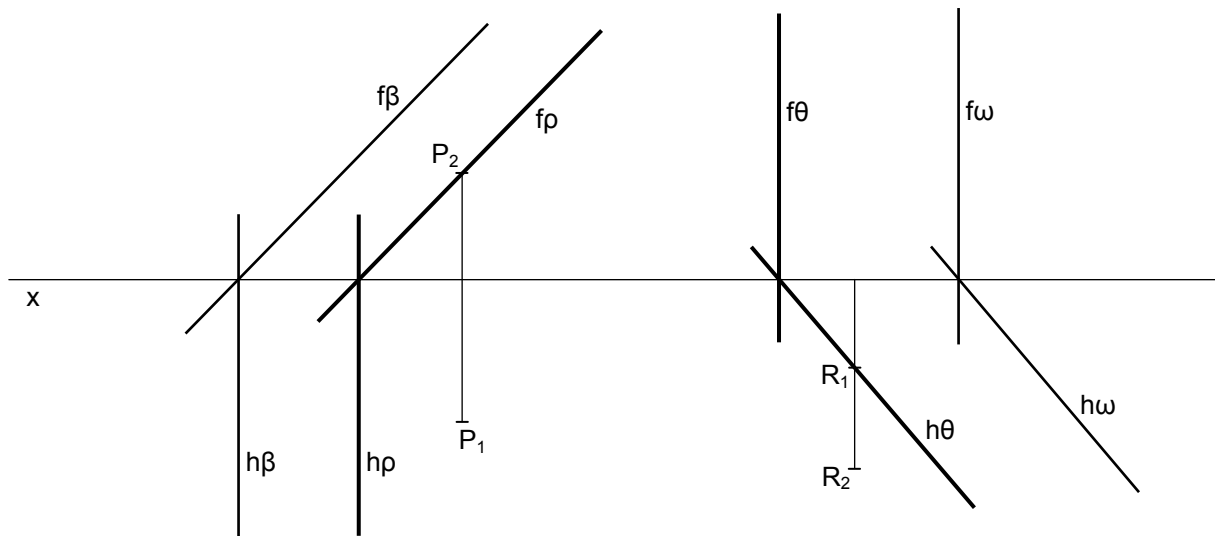


Paralelismos entre planos de rampa

Para que dois planos de rampa sejam paralelos é necessário que os seus traços laterais também o sejam. Na situação de baixo, um dos planos é passante, definido pelo ponto P .

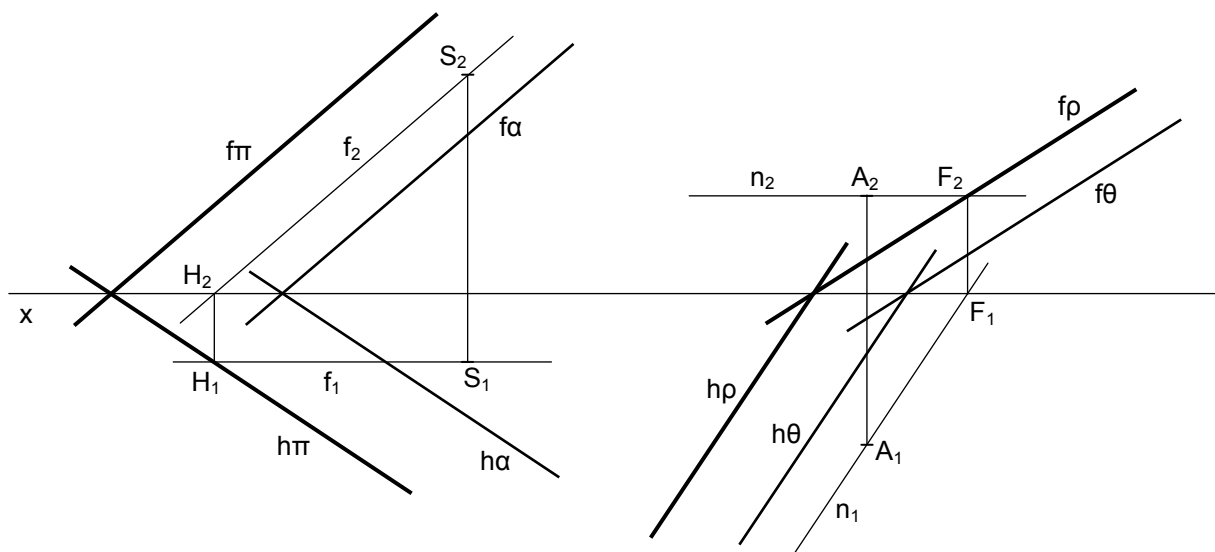
Plano paralelo a outro contendo um ponto dado

Quando se pretende determinar um plano paralelo a outro, mas contendo um ponto dado, obviamente já não se pode traçar esse plano num sítio qualquer.



Paralelismo entre planos de topo e entre planos verticais

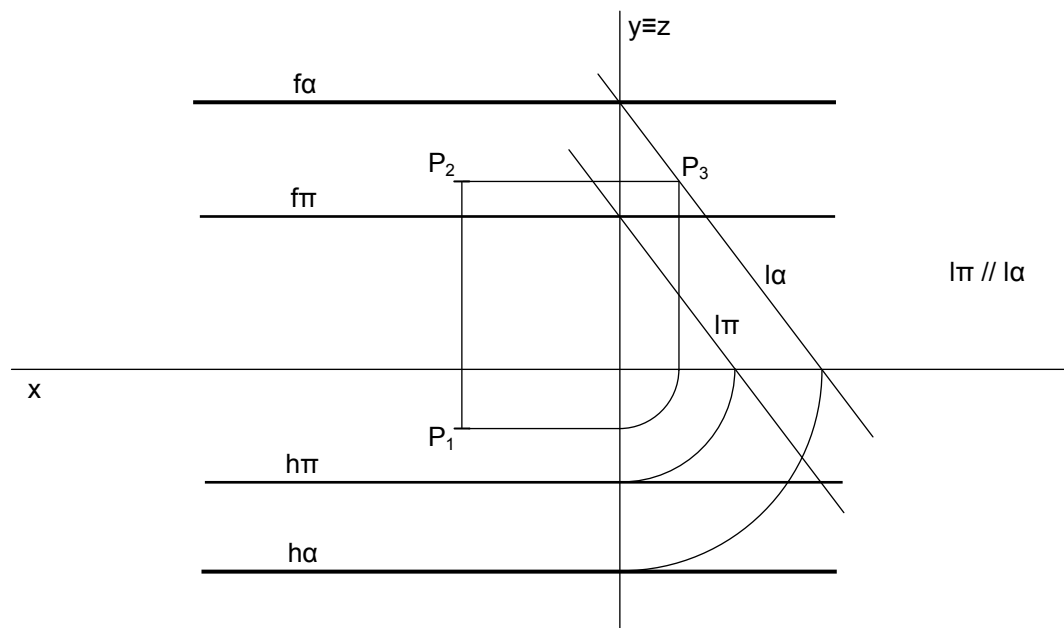
Observam-se aqui duas situações que envolvem planos projectantes. Para que um plano de topo contenha um ponto e seja paralelo a outro plano, além de ter os seus traços paralelos aos traços homónimos do outro, o seu traço frontal tem que conter a projecção frontal do ponto. O raciocínio é idêntico para o plano vertical, devendo o traço horizontal deste conter a projecção horizontal do ponto. No primeiro caso é indiferente a medida do afastamento do ponto, no segundo é indiferente a da cota.



Paralelismo entre planos oblíquos

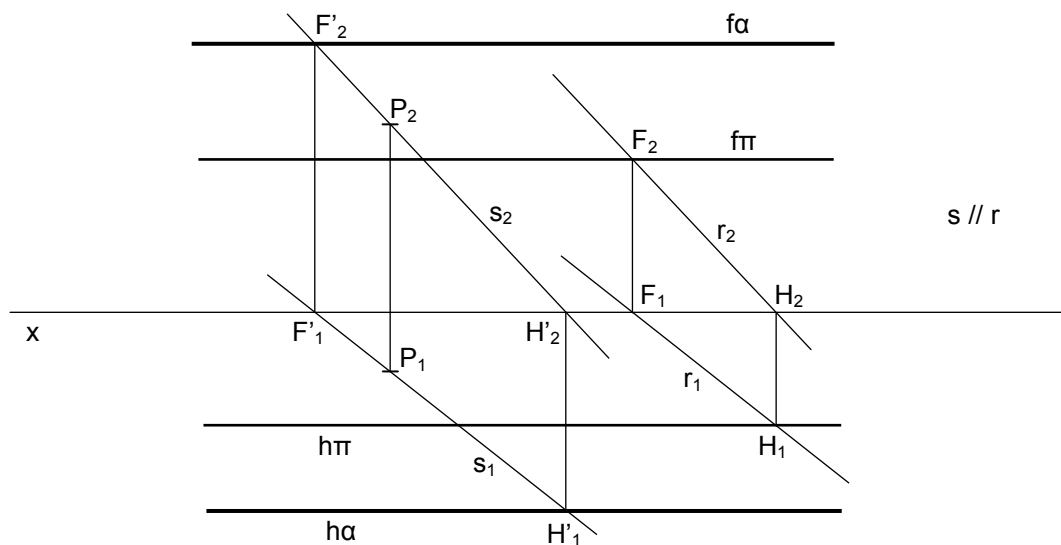
Não sendo este um plano projectante, para resolver estes problemas há que utilizar uma recta auxiliar, paralela ao plano e contendo o ponto dado. Essa recta, que convém ser frontal ou horizontal, ficará contida no plano pretendido. Ou seja, o ponto pertence ao plano porque pertence a uma recta que pertence ao plano.

Para determinar um plano de rampa paralelo a outro, e contendo um ponto dado, utilizam-se aqui dois processos.



Determinação do paralelismo entre planos de rampa recorrendo aos traços laterais

Já vimos que dois planos de rampa são paralelos quando têm os traços laterais paralelos. Mas pretende-se aqui encontrar um plano paralelo ao outro contendo um ponto dado. O plano contém esse ponto porque o seu traço lateral contém a projecção lateral do ponto.



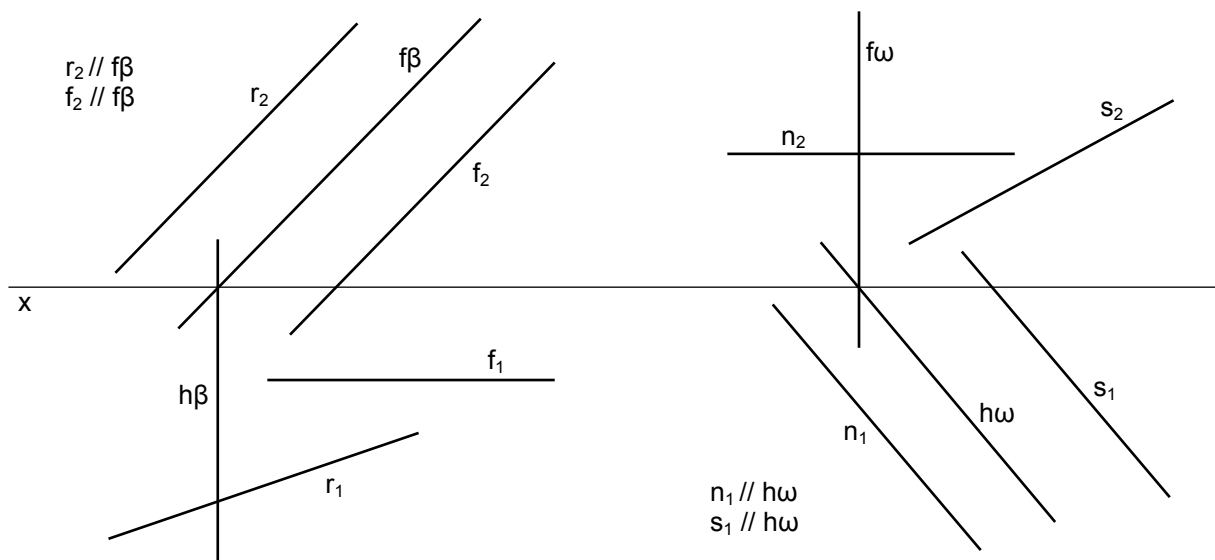
Determinação do paralelismo entre planos de rampa recorrendo a rectas oblíquas

A recta r é uma recta oblíqua qualquer que se traçou no plano dado π . Passando pelo ponto dado P a recta s , paralela à outra, obtém-se um plano paralelo ao primeiro, bastando para tal que esse plano contenha esta segunda recta.

Paralelismos de resolução directa entre rectas e planos

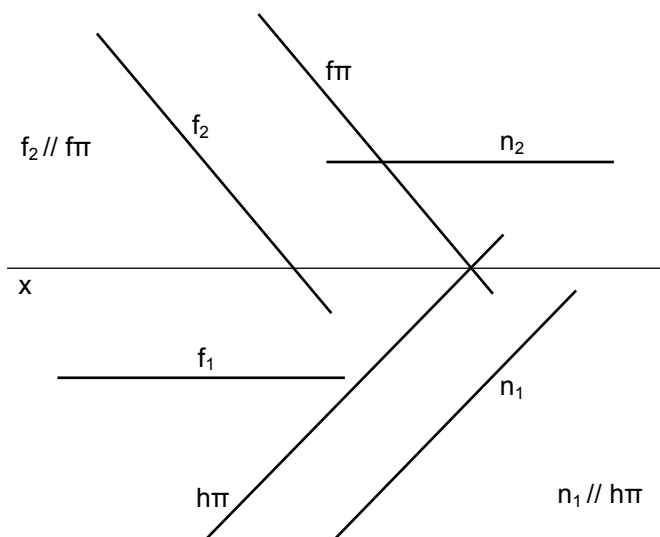
O paralelismo entre rectas e planos dá origem a situações muito diversas, umas óbvias, outras mais complexas. Nesta página observam-se as situações mais simples. Contudo, não se apresentam os casos onde os paralelismos são automáticos:

- Plano horizontal com rectas horizontal, fronto-horizontal e de topo
- Plano frontal com rectas frontal, fronto-horizontal e vertical
- Plano de perfil com rectas de perfil, de topo e vertical
- Plano de rampa com recta fronto-horizontal
- Plano de topo com recta de topo
- Plano vertical com recta vertical



Paralelismo entre rectas e os planos de topo e vertical

Qualquer recta cuja projecção frontal seja paralela ao traço frontal do plano de topo, será paralela ao plano. Qualquer recta cuja projecção horizontal seja paralela ao traço horizontal do plano vertical, será paralela ao plano. As posições das outras projecções não têm qualquer interferência.

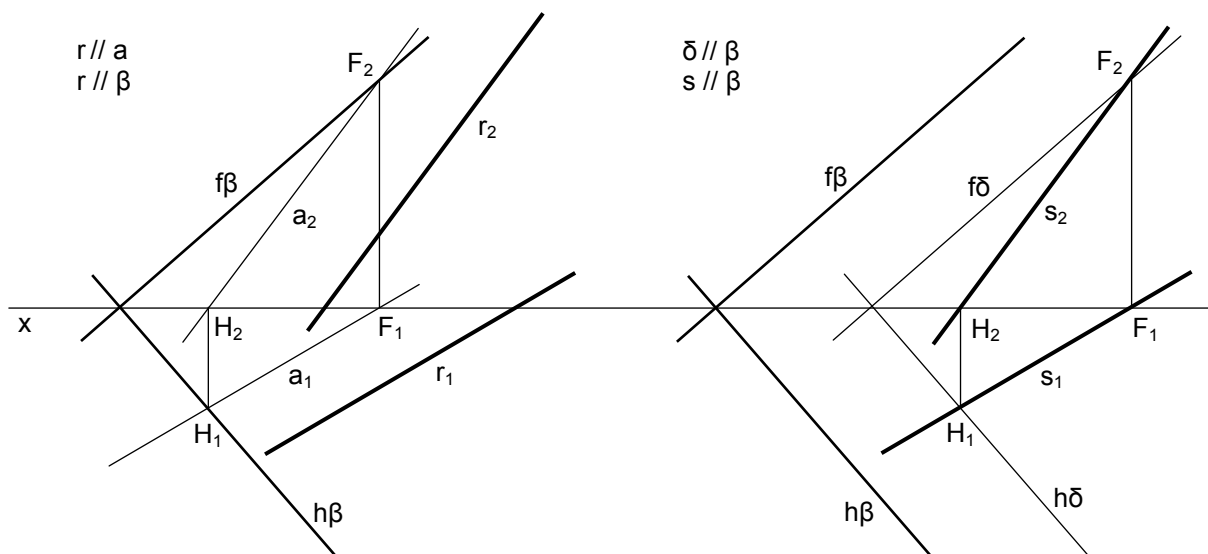


Paralelismo entre o plano oblíquo e as rectas horizontal e frontal

Exceptuando as situações de pertença, uma recta frontal é paralela a um plano oblíquo quando a sua projecção frontal é paralela ao traço homónimo do plano; do mesmo modo, uma recta horizontal é paralela a um plano oblíquo quando a sua projecção horizontal é paralela ao traço homónimo do plano.

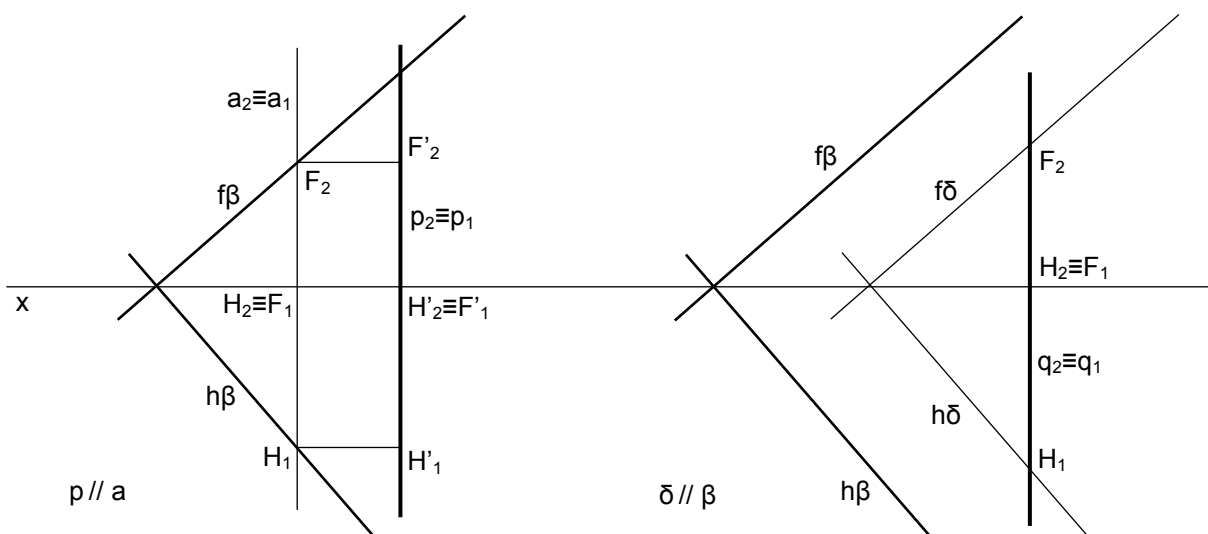
Paralelismos entre rectas e o plano oblíquo

Observam-se nesta página paralelismos das rectas oblíqua e de perfil com o plano oblíquo. O paralelismo das rectas horizontal e frontal com este plano foi abordado na página anterior.



Recta oblíqua paralela a plano oblíquo

Pode-se traçar rectas oblíquas paralelas ao plano oblíquo de duas maneiras. No primeiro caso é traçada uma recta que pertence ao plano; a recta r , sendo paralela a essa, será também paralela ao plano. No segundo caso é traçado um plano paralelo ao plano dado; a recta s , situada nesse plano será paralela ao outro.

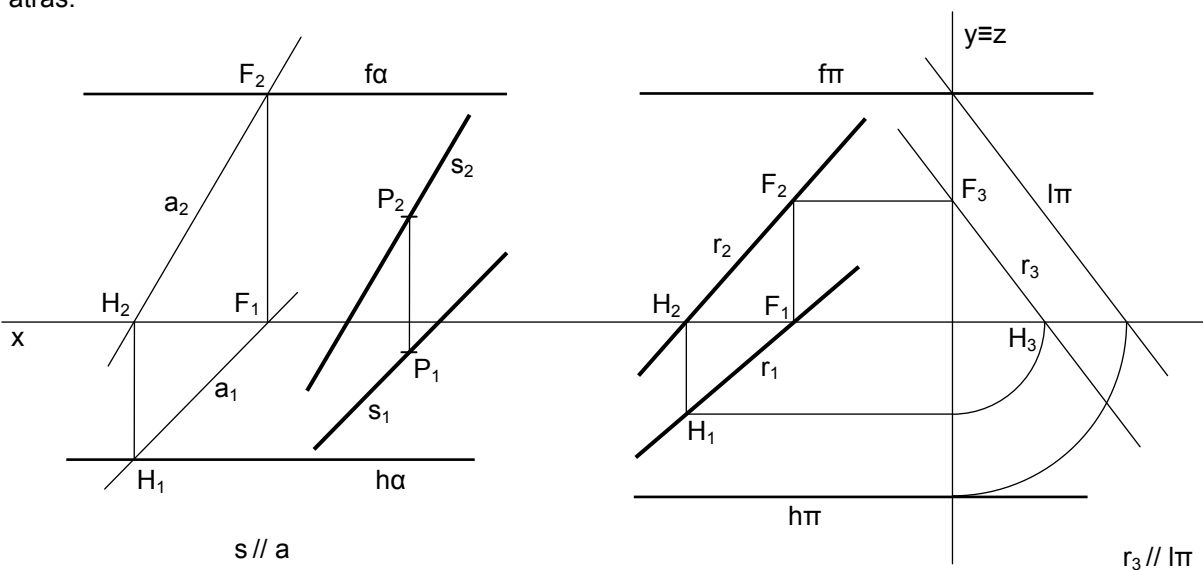


Recta de perfil paralela a plano oblíquo

Com a recta de perfil pode-se proceder de modo idêntico ao observado para as rectas oblíquas: no primeiro caso, representando uma recta paralela a uma recta do plano; no segundo caso, representando a recta num plano paralelo ao plano dado. As linhas paralelas ao eixo x , que passam pelos traços da recta de perfil na primeira situação, mostram que essas medidas são iguais.

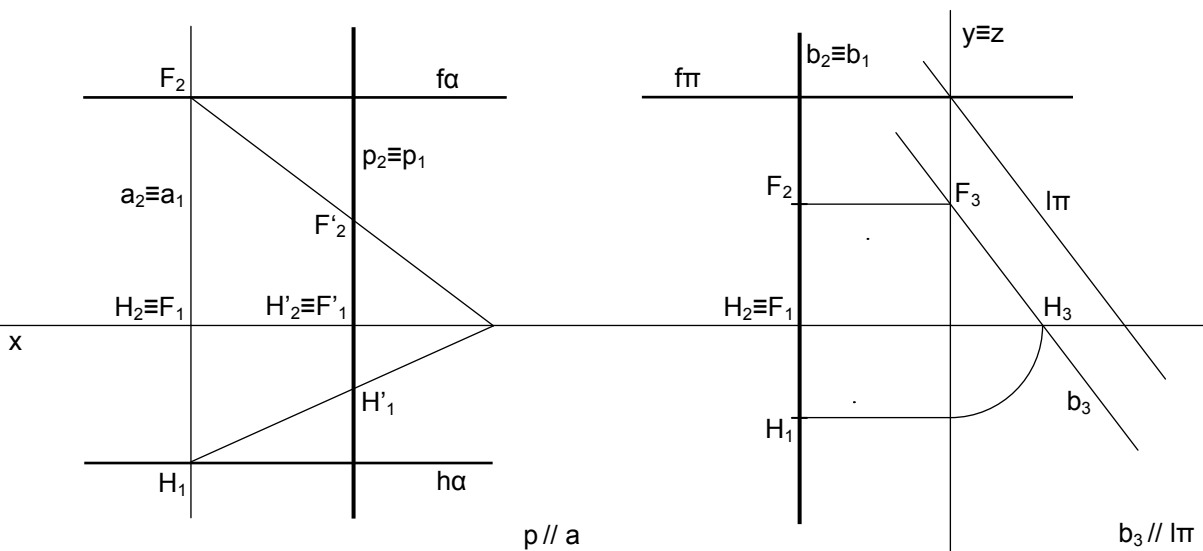
Paralelismos entre rectas e o plano de rampa

Observam-se nesta página os paralelismos entre as rectas oblíqua e de perfil e o plano de rampa. O paralelismo entre a recta fronto-horizontal e o plano de rampa é imediato e foi referido duas páginas atrás.



Recta oblíqua paralela a plano de rampa

Pode-se traçar rectas oblíquas paralelas ao plano de rampa de duas maneiras. No primeiro caso é traçada uma recta que pertence ao plano; a recta s , que contém P , sendo paralela a essa será também paralela ao plano. No segundo caso verifica-se que a projecção lateral da recta é paralela ao traço lateral do plano, o que garante o paralelismo entre ambos.

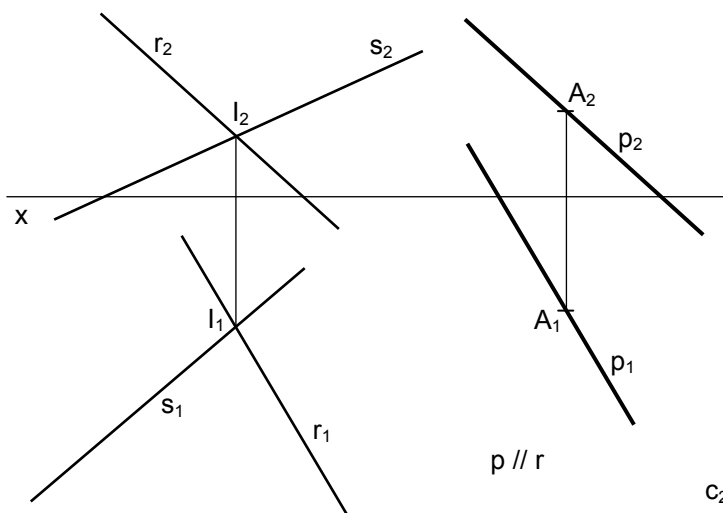


Recta de perfil paralela a plano de rampa

Com a recta de perfil pode-se proceder de modo idêntico ao observado para as rectas oblíquas. No primeiro caso, representando uma recta paralela a uma recta do plano; no segundo caso, verifica-se que a projecção lateral da recta é paralela ao traço lateral. As linhas convergentes no eixo x, na primeira situação, garantem que os traços da recta p se mantêm proporcionais aos da recta a. Na segunda situação só é dado o traço frontal do plano, partindo-se do princípio de que este é paralelo à recta.

Paralelismos entre rectas e planos definidos por rectas

Aqui mostra-se como determinar rectas paralelas a planos definidos por rectas. É comum um enunciado pedir que a recta passe por um ponto dado, pelo que se mostram aqui situações equivalentes.

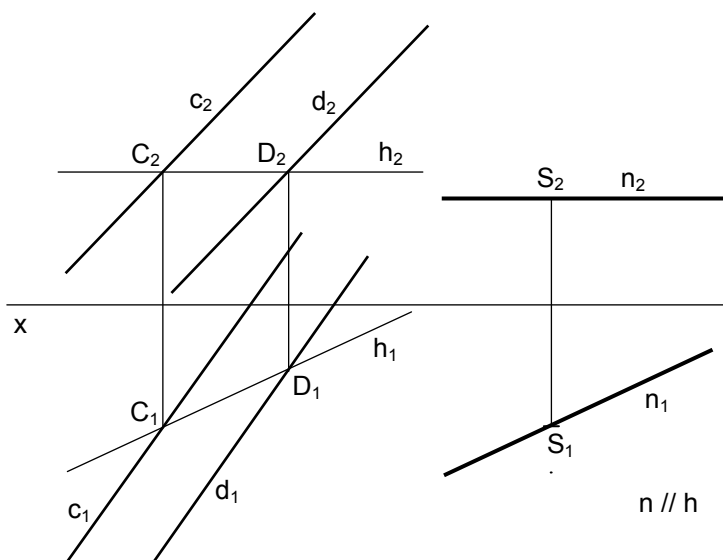
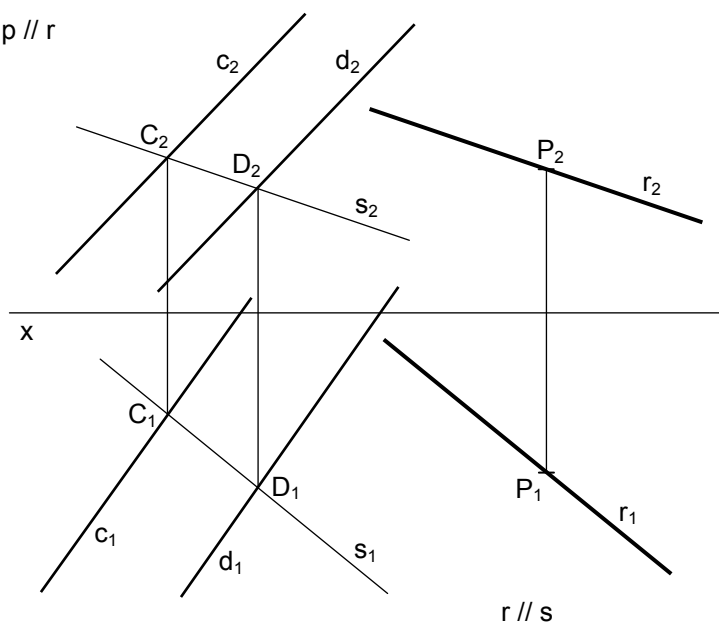


Recta oblíqua qualquer paralela a plano definido por duas rectas

Se não se pedir uma recta específica, basta traçar uma paralela a uma das rectas desse plano. Neste caso apenas se pretende que a recta contenha o ponto A, pelo que se traçou a recta p paralela à r.

Recta oblíqua específica paralela a plano definido por duas rectas

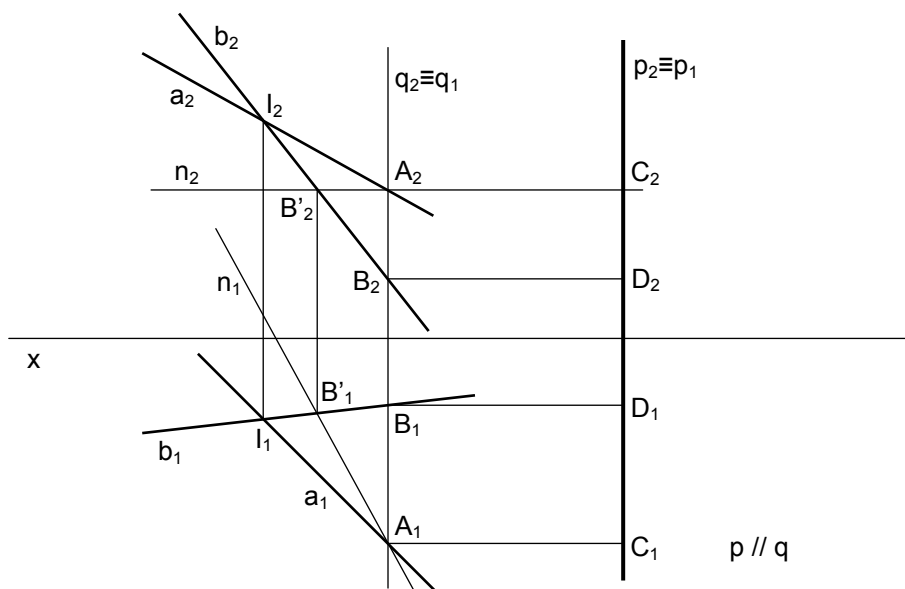
Caso se pretenda uma recta oblíqua com características específicas, há que cruzar com as rectas dadas uma que tenha essas características. Neste caso pretende-se uma recta cuja projecção horizontal faça 40°ad e que contenha o ponto P.



Recta horizontal paralela a plano definido por duas rectas

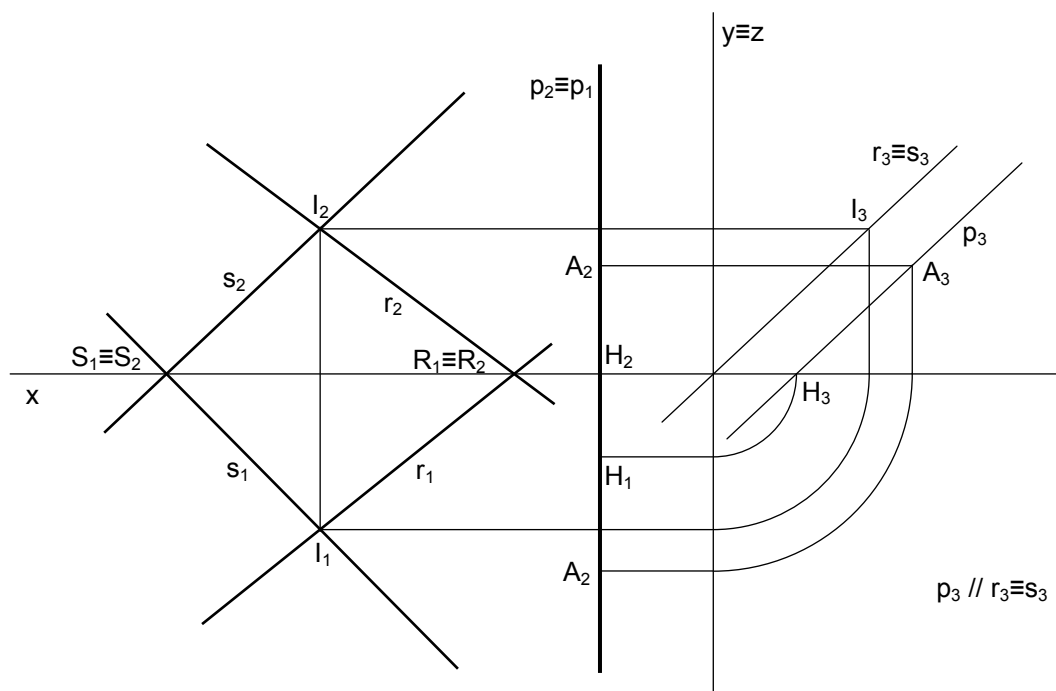
Como no caso anterior, também aqui se pretende uma recta diferente das rectas dadas, pelo que há que traçar uma concorrente com essas, que tenha as características pretendidas. Ao lado traça-se uma paralela a essa. Neste caso trata-se de uma recta horizontal, mas tratando-se de uma recta frontal o processo seria idêntico.

Mostram-se aqui duas situações que envolvem a recta de perfil. Num dos casos o plano definido pelas rectas é oblíquo, no outro é de rampa passante.



Recta de perfil paralela a plano definido por rectas oblíquas

Aqui procede-se de forma idêntica à do exercício anterior, traçando uma recta de perfil no plano. A recta de perfil pretendida tem as características dessa. As linhas paralelas ao eixo x garantem que os pontos de uma são idênticos aos da outra. A recta horizontal serve para confirmar que o plano não é de rampa, pois se o fosse a recta de perfil p não poderia ser determinada deste modo, uma vez que pertenceria também ao plano. Caso se pretenda que a recta de perfil contenha um ponto dado, será necessário, por exemplo, recorrer às projecções laterais do ponto e da recta.

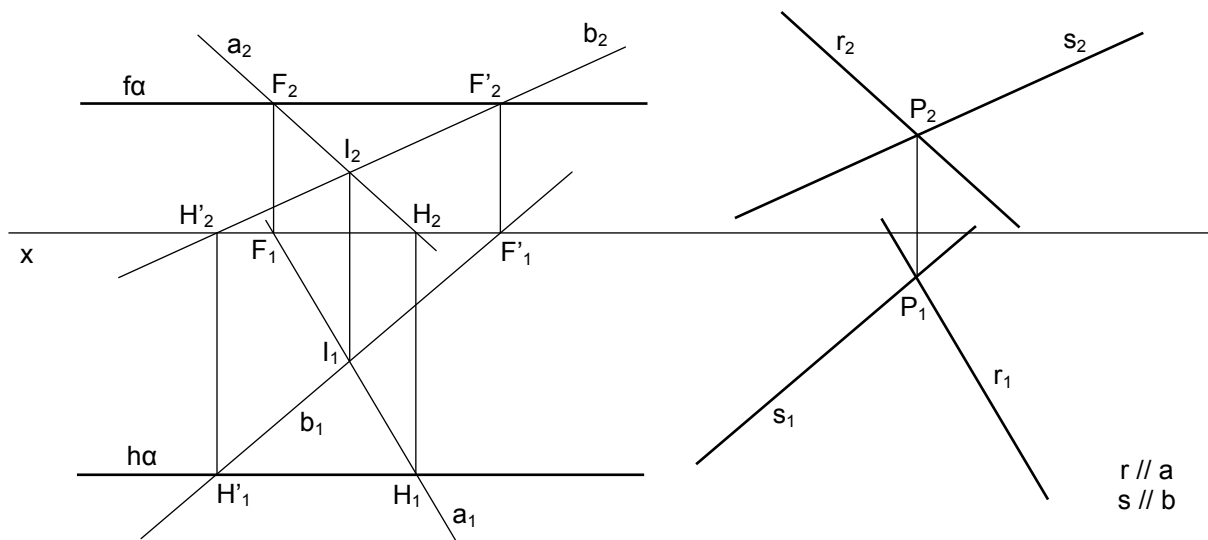


Recta de perfil paralela a plano definido por rectas oblíquas dum plano de rampa

Neste caso, as rectas que definem o plano são passantes, o que quer dizer que o plano de rampa que definem é também passante. Após determinar as projecções laterais dessas rectas, que são coincidentes, traça-se uma recta de perfil cuja projecção lateral é paralela às das rectas dadas (que são coincidentes). Aqui a recta está definida pelo ponto A e pelo seu traço horizontal.

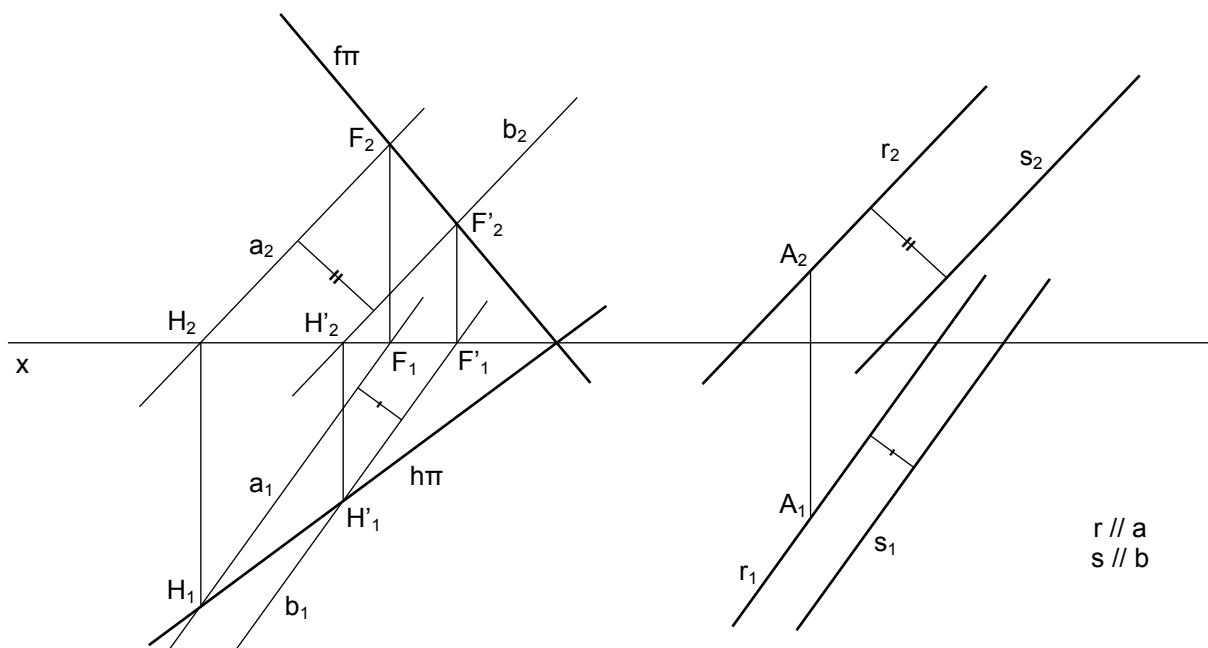
Paralelismos entre planos definidos por rectas e planos definidos por traços

Aqui mostra-se como determinar o paralelismo entre um plano definido por traços com outro definido por rectas.



Plano definido por rectas concorrentes paralelo a um plano de rampa

No plano de rampa definido pelos traços foram marcadas duas rectas oblíquas, ao lado estão traçadas duas rectas paralelas a essas. Deste modo, o plano definido pelas rectas é paralelo ao plano definido pelos traços. Aqui parte-se do princípio de que se pretende determinar um plano paralelo a α , contendo o ponto P.

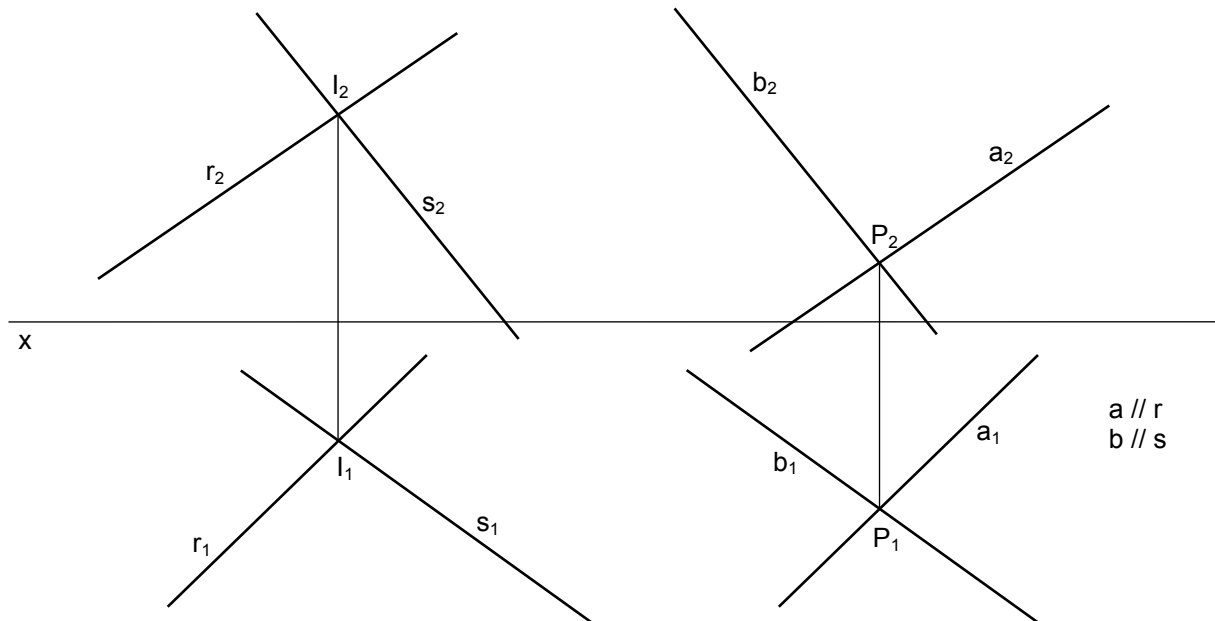


Plano definido por rectas paralelas paralelo a um plano oblíquo

Aqui procede-se como no caso anterior, marcando duas rectas no plano oblíquo definido pelos traços; ao lado foram traçadas duas rectas paralelas a essas, passando uma delas pelo ponto A, que se pretendia contido nesse plano. Tratando-se de rectas paralelas, devem manter-se iguais as distâncias entre as suas projecções.

Paralelismos entre planos definidos por rectas

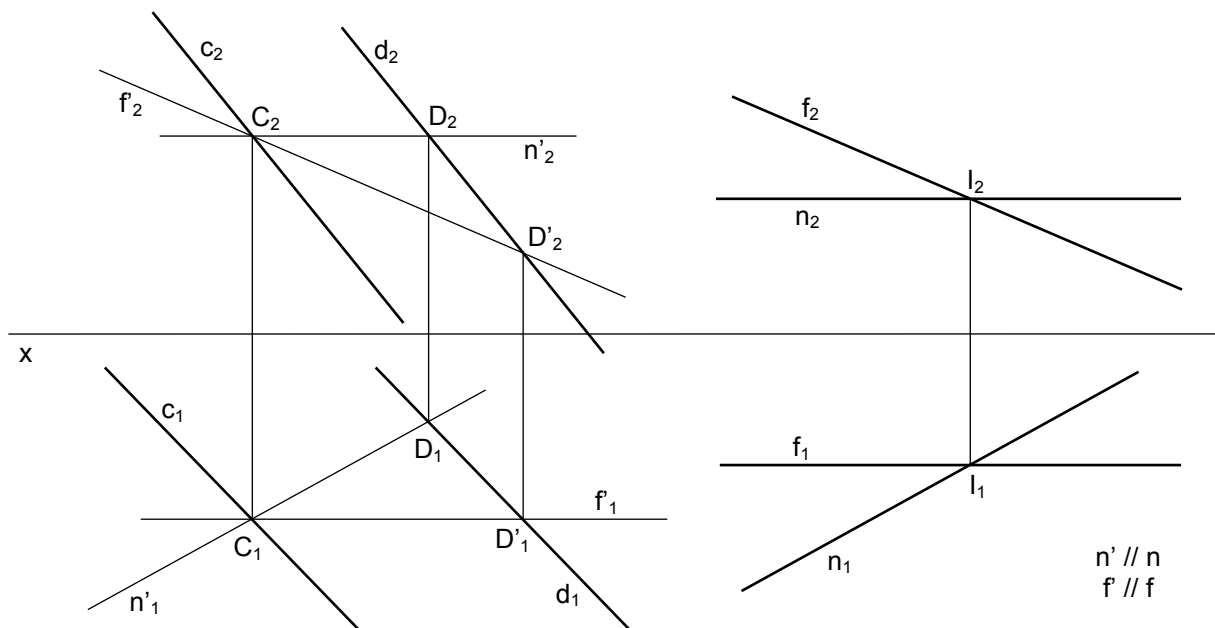
Aqui mostram-se algumas situações de paralelismos entre planos definidos por rectas.



Planos paralelos definidos por rectas concorrentes

As rectas r e s definem um plano; as rectas a e b definem outro. Sendo a recta a paralela à recta r e a b paralela à s , os planos por elas definidos são paralelos entre si.

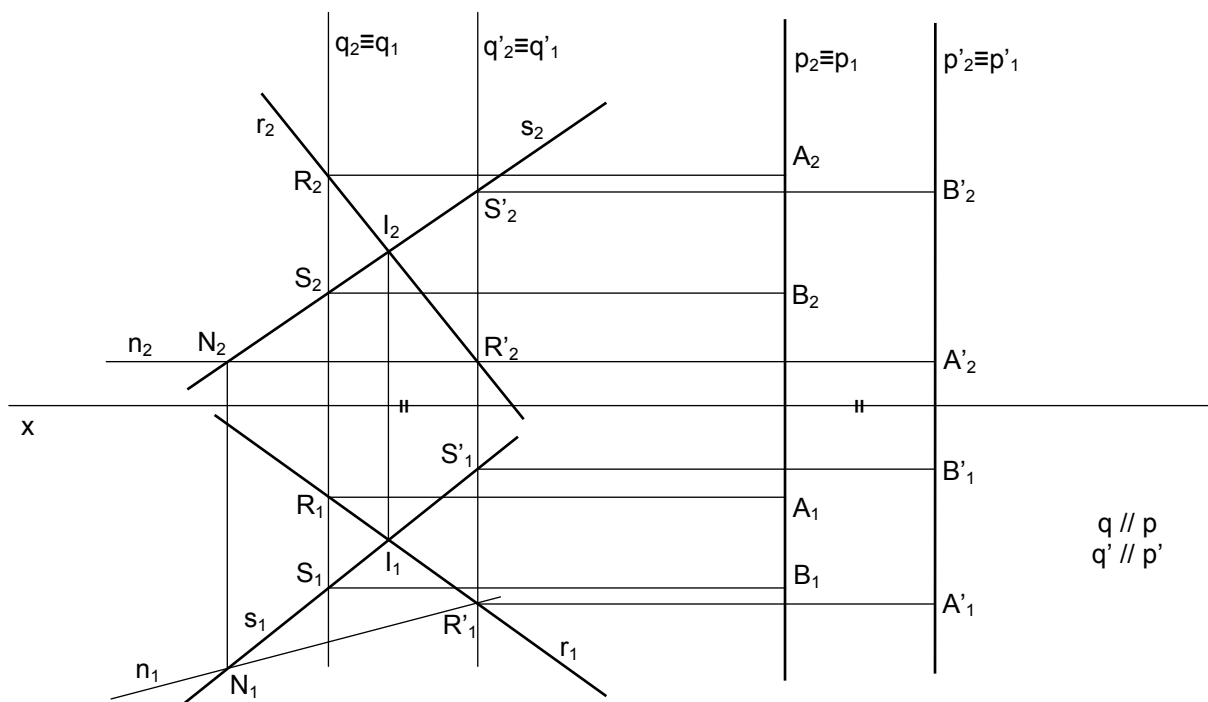
Um exercício em que se pedisse para determinar um plano paralelo ao plano definido pelas rectas r e s , contendo o ponto P , seria assim resolvido, sem necessidade de mais traçados.



Planos paralelos, sendo um definido por rectas oblíquas paralelas e outro definido por uma recta horizontal e outra frontal

As rectas c e d , oblíquas e paralelas entre si, definem um plano. Traçando as rectas f' e n' , também desse plano, ficamos com a direcção a dar às rectas f e n que definem um plano paralelo ao anterior, neste caso contendo o ponto I .

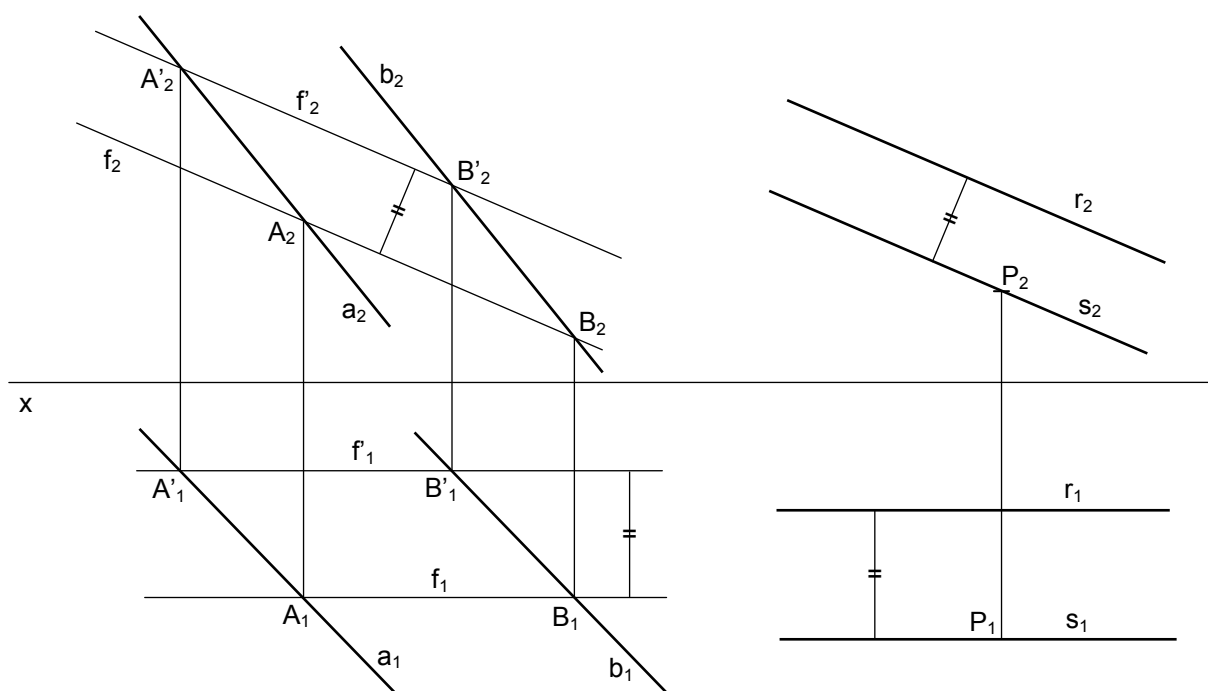
Nesta página mostram-se mais exemplos de paralelismos entre planos definidos por rectas.



Plano definido por rectas oblíquas paralelo a plano definido por rectas de perfil

Aqui pretende-se um plano definido por duas rectas de perfil que seja paralelo a outro definido por duas rectas oblíquas. Traçam-se duas rectas de perfil concorrentes com as oblíquas e, ao lado, traçam-se outras duas idênticas a essas. As linhas paralelas ao eixo x provam que os pontos das rectas de perfil mantêm a mesma proporção e disposição. O valor de abscissa entre essas rectas também tem de ser mantido.

A recta horizontal n prova que o plano é oblíquo, sendo de rampa as rectas p e p' estariam contidas nele.

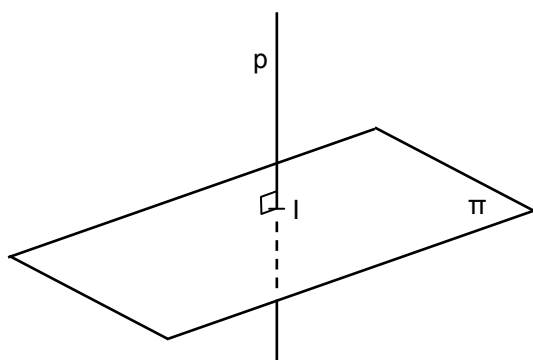


Plano definido por rectas oblíquas paralelo a plano definido por rectas frontais

Para definir um plano por rectas frontais, sendo paralelo a outro definido por rectas oblíquas, cruzam-se duas rectas frontais com as oblíquas e, ao lado, traçam-se outras idênticas a essas. Para garantir o paralelismo entre os planos tem de se manter a distância entre as projecções das rectas frontais. Aqui parte-se ainda do princípio de que se pretende um plano que contenha o ponto P.

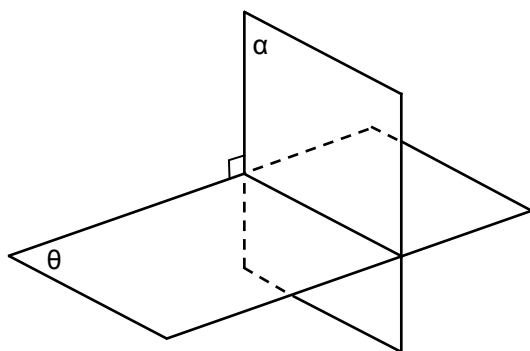
As perpendicularidades no espaço

Na segunda parte deste capítulo estudam-se as perpendicularidades entre: uma recta e um plano, dois planos, duas rectas. No espaço é fácil verificar e compreender essas situações de perpendicularidade; contudo, nas projecções nem sempre as situações se apresentam tão óbvias nem de resolução imediata.



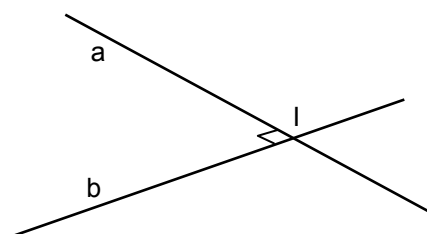
Perpendicularidade entre uma recta e um plano

Aqui mostra-se um plano horizontal e uma recta vertical. Obviamente, em qualquer posição que estejam, uma recta e um plano são perpendiculares sempre que fazem entre si um ângulo recto.



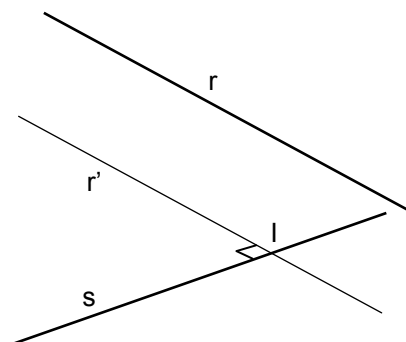
Perpendicularidade entre dois planos

Aqui mostra-se um plano numa posição horizontal, outro numa posição vertical. Contudo, quaisquer planos são perpendiculares entre si sempre que fazem um ângulo recto.



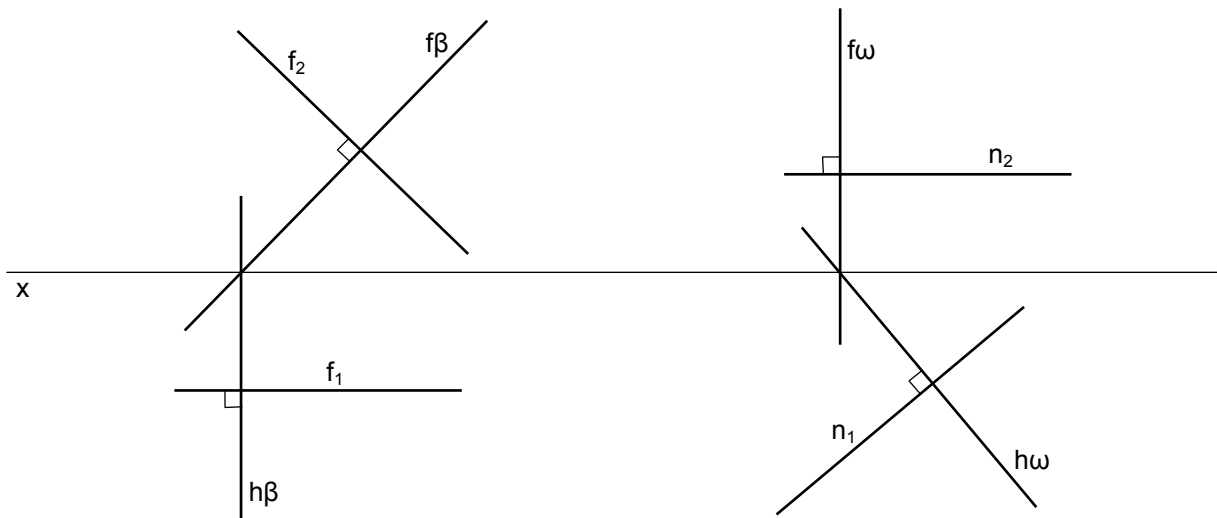
Perpendicularidade entre duas rectas

Duas rectas podem ser perpendiculares sendo concorrentes ou enviesadas. Em qualquer dos casos fazem um ângulo recto entre si. Nalguns casos (situação de baixo), prova-se que as rectas enviesadas são perpendiculares se cruzarmos por uma delas uma recta paralela à outra, devendo estas ser perpendiculares entre si.



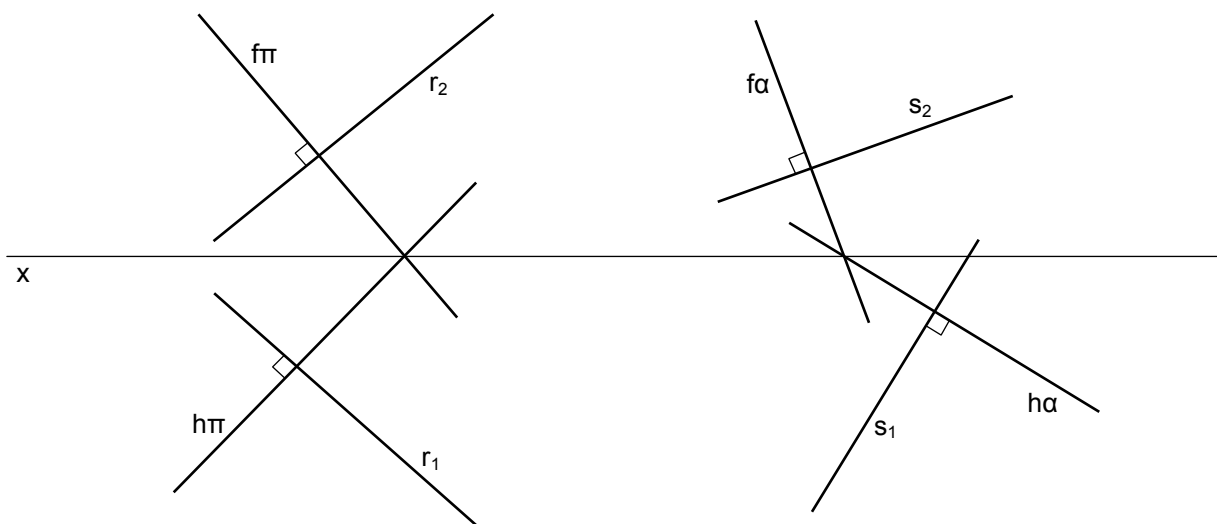
Perpendicularidades de resolução directa entre rectas e planos

A perpendicularidade entre rectas e planos origina situações muito diversas, umas óbvias e simples, outras complexas. Nesta página observam-se as situações mais simples. Em todos os casos as rectas perpendiculares a planos têm as projecções perpendiculares aos traços homónimos dos planos. Não se apresentam traçados dos casos em que a perpendicularidade entre rectas e planos é imediata: plano horizontal e recta vertical; plano frontal e recta de topo; plano de perfil e recta fronto-horizontal.



Rectas perpendiculares aos planos de topo e vertical

Apenas as rectas frontais podem ser perpendiculares aos planos de topo, bastando para isso que a sua projecção frontal seja perpendicular ao traço homónimo do plano. No caso do plano vertical, apenas as rectas horizontais lhe podem ser perpendiculares, bastando que a sua projecção horizontal seja perpendicular ao traço homónimo do plano.

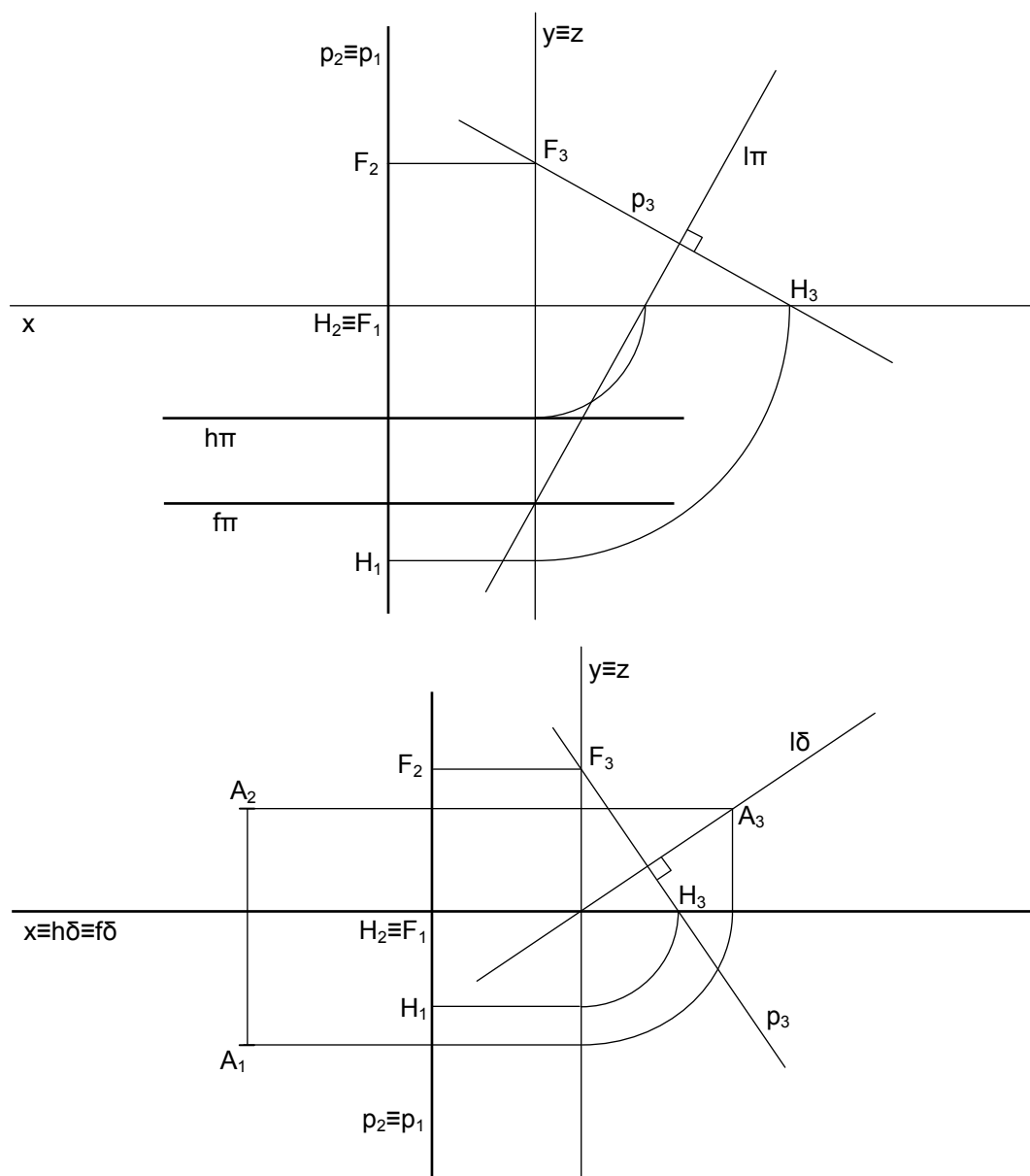


Recta perpendicular ao plano oblíquo

As rectas perpendiculares ao plano oblíquo são rectas oblíquas cujas projecções são perpendiculares aos traços homónimos do plano. Apresentam-se aqui duas situações.

Perpendicularidades entre o plano de rampa e a recta de perfil

Como se observou na página anterior, cada plano só pode ter um tipo de recta que lhe seja perpendicular, e vice-versa. Também só rectas de perfil podem ser perpendiculares ao plano de rampa. Nos casos anteriores pode-se sempre traçar directamente uma recta perpendicular a um plano; contudo, isso não é possível entre o plano de rampa e a recta de perfil. As projecções da recta são sempre perpendiculares aos traços do plano, mas isso não garante a perpendicularidade entre eles. Para confirmar ou determinar o paralelismo entre um plano de rampa e uma recta de perfil recorre-se aqui ao plano lateral de projecção; contudo, podem também ser utilizados os métodos geométricos auxiliares: rebatimentos, rotações ou mudanças de planos.



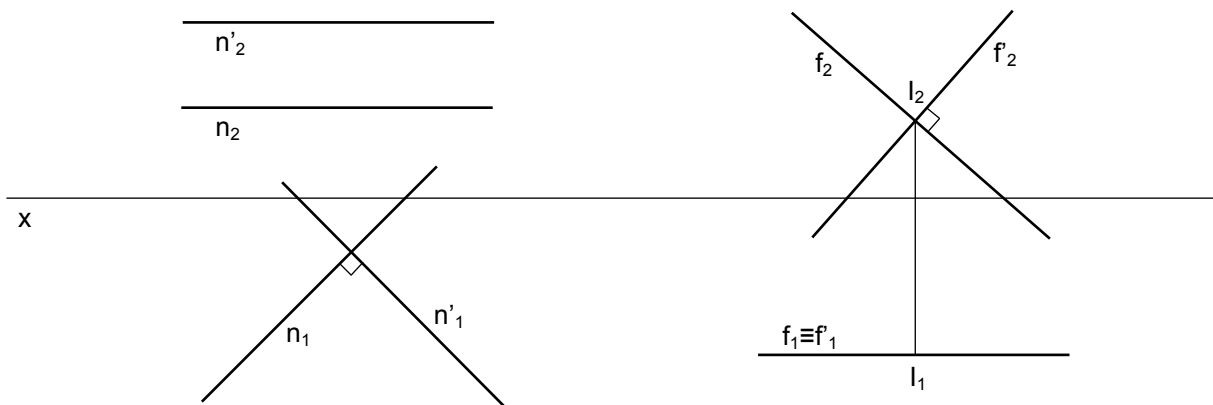
Recta perpendicular ao plano de rampa

Para que a recta de perfil e o plano de rampa sejam perpendiculares entre si, a projecção lateral da recta tem de ser perpendicular ao traço lateral do plano. O segundo exemplo mostra um plano passante.

Perpendicularidades de resolução directa entre rectas

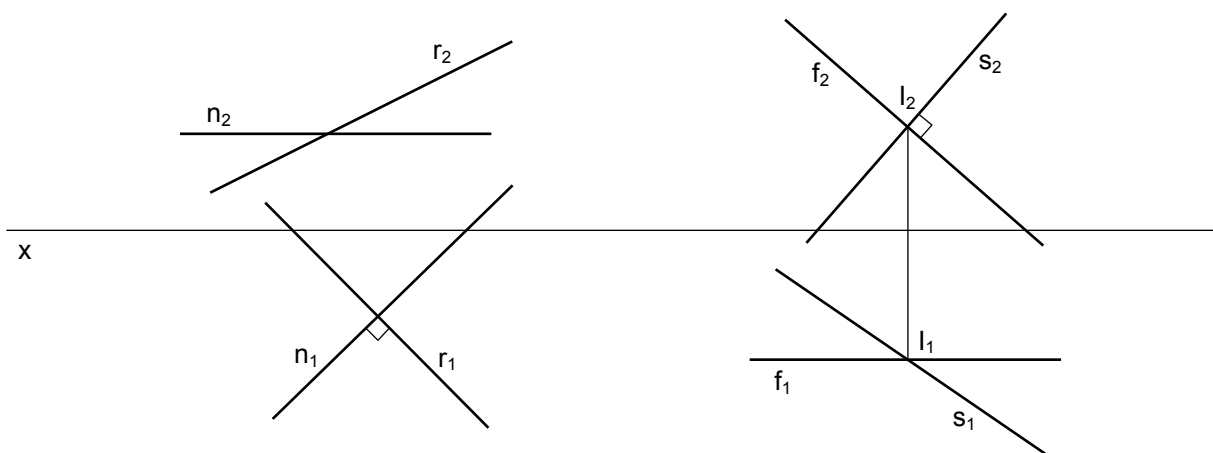
Nesta página exemplificam-se casos em que se podem traçar directamente duas rectas perpendiculares entre si, sem necessidade de utilizar qualquer processo auxiliar.

Determinados tipos de rectas são sempre perpendiculares, como tal, não se apresentam aqui traçados relativos a essas situações: recta fronto-horizontal com as rectas de perfil, de topo e vertical; recta vertical com as rectas horizontal, de topo e fronto-horizontal; recta de topo com as rectas vertical, frontal e fronto-horizontal; recta de perfil com a recta fronto-horizontal; recta frontal com a recta de topo; recta horizontal com a recta vertical.



Perpendicularidades entre rectas horizontais e entre rectas frontais

Duas rectas horizontais são perpendiculares quando as suas projecções horizontais também o são. Duas rectas frontais são perpendiculares quando as suas projecções frontais o são. No primeiro caso temos rectas enviesadas, no segundo rectas concorrentes.

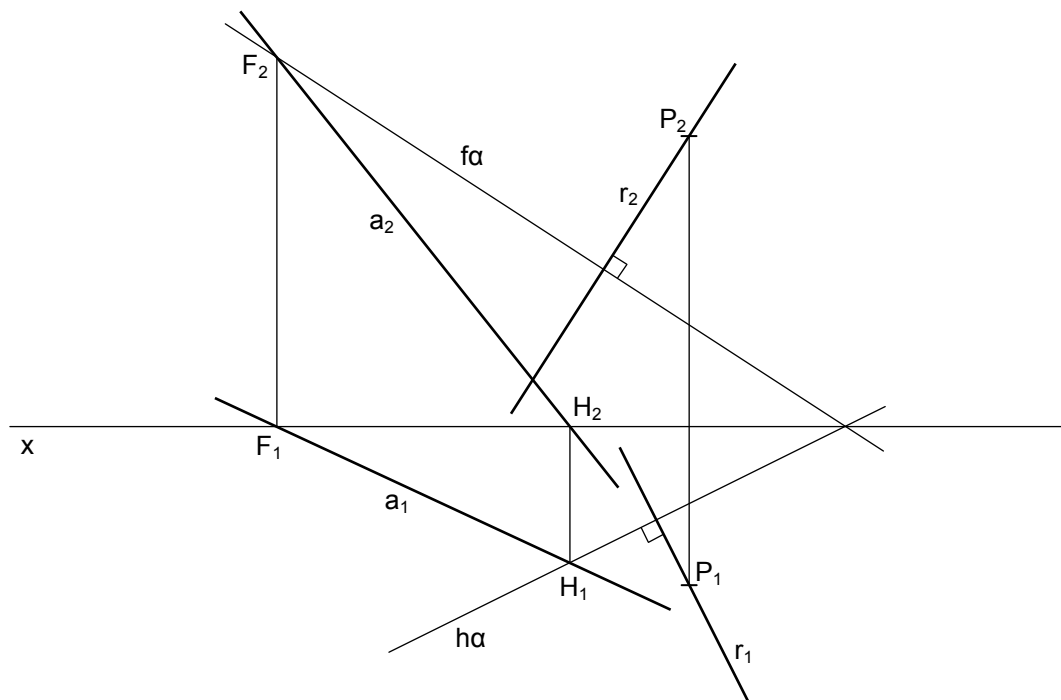


Recta oblíqua perpendicular às rectas horizontal e frontal

Para que as rectas oblíqua e horizontal sejam perpendiculares entre si basta que as suas projecções horizontais o sejam. No caso das rectas oblíqua e frontal basta que sejam perpendiculares as suas projecções frontais. A posição relativa entre as outras projecções é indiferente. Também aqui se mostram rectas enviesadas no primeiro caso e concorrentes no segundo.

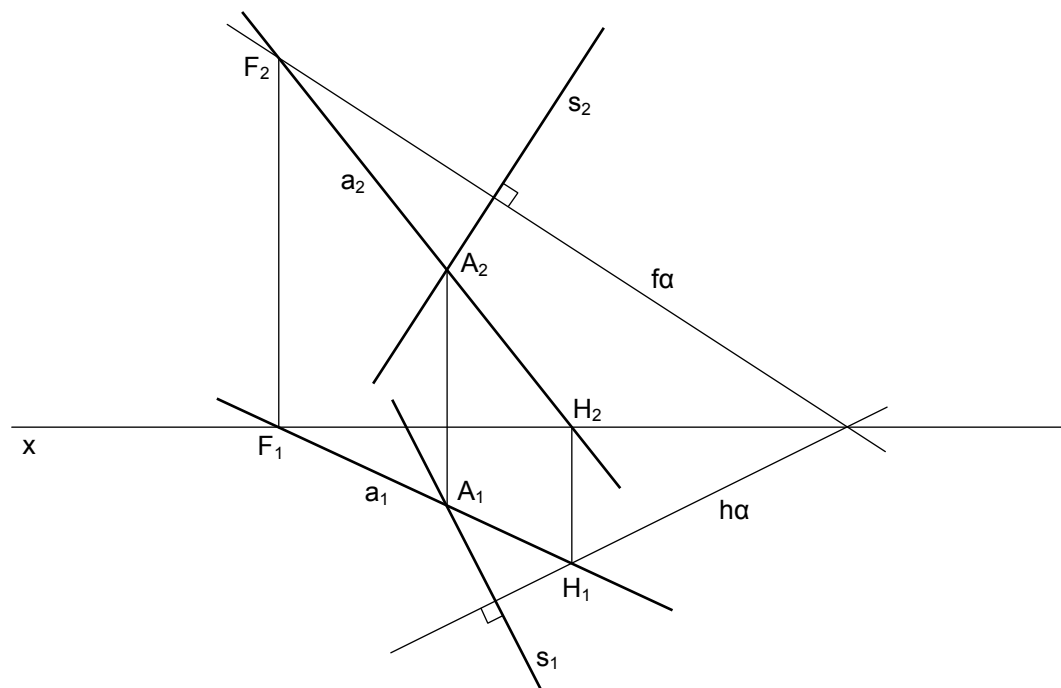
Perpendicularidades entre rectas oblíquas

Mostra-se aqui a perpendicularidade entre rectas oblíquas. Duas rectas oblíquas são perpendiculares quando uma delas é perpendicular a um plano oblíquo que contém a outra.



Perpendicularidade entre rectas oblíquas enviesadas

A recta r é perpendicular à recta a porque é perpendicular ao plano α , que a contém. Pretende-se que essa recta contenha o ponto P .

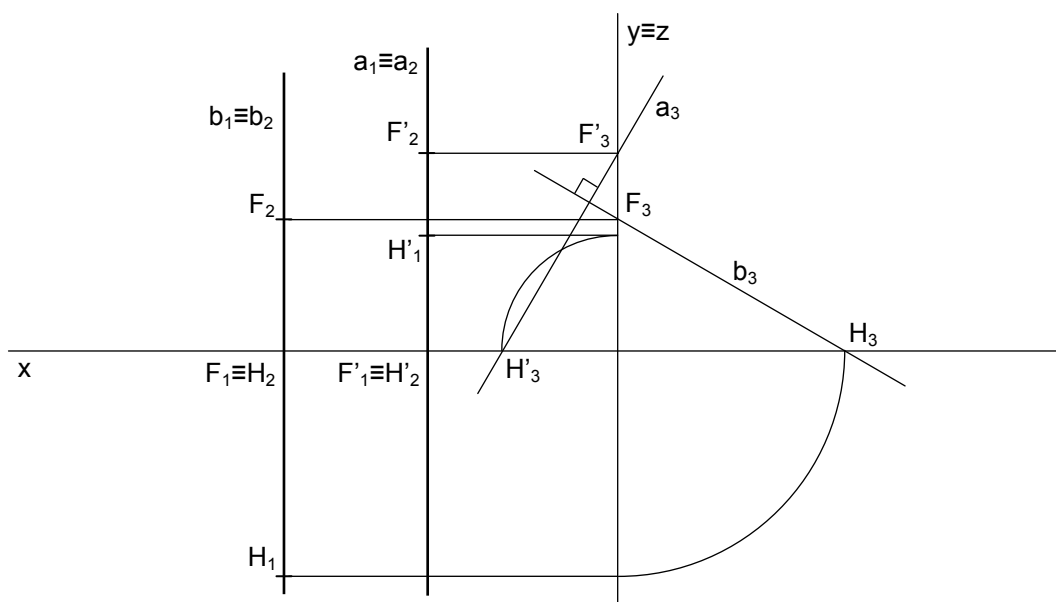


Perpendicularidade entre rectas oblíquas concorrentes

Esta situação apresenta-se idêntica à anterior. Simplesmente, a recta s , além de ser perpendicular ao plano α , que contém a recta a , é ainda concorrente com essa recta no ponto A da recta dada.

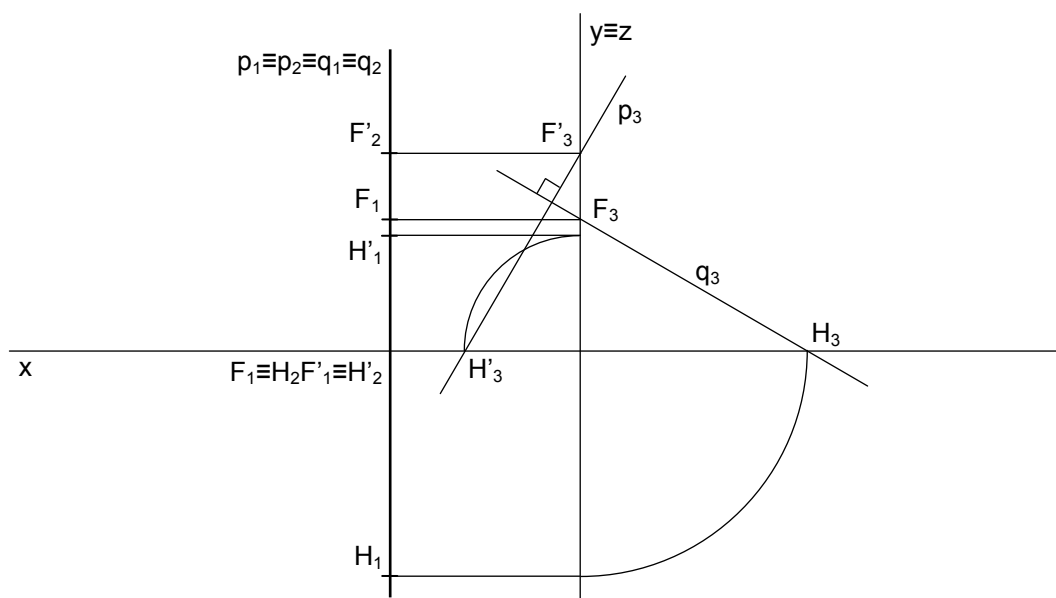
Perpendicularidades entre rectas de perfil

Pode-se representar rectas de perfil perpendiculares entre si, ou confirmar se o são, recorrendo às suas projecções laterais. Também se podem utilizar os métodos geométricos auxiliares: rebatimentos, rotações e mudanças de plano. Aqui exemplifica-se com rectas definidas pelos seus traços mas, obviamente, este processo também é válido para rectas definidas por outros pontos.



Perpendicularidade entre rectas de perfil enviesadas

Duas rectas de perfil perpendiculares, enviesadas ou não, têm projecções laterais perpendiculares entre si.

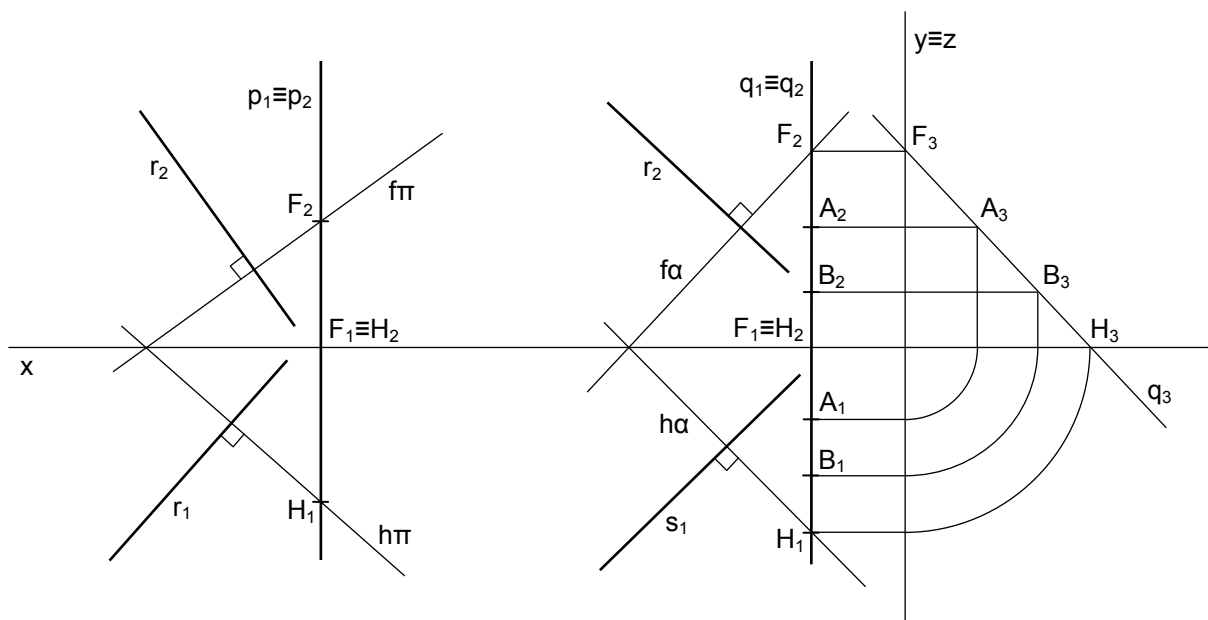


Perpendicularidade entre rectas de perfil concorrentes

O exemplo que aqui se mostra é idêntico ao anterior, com a diferença de as rectas de perfil terem a mesma abcissa, ou seja, serem concorrentes.

Perpendicularidades entre rectas oblíquas e de perfil

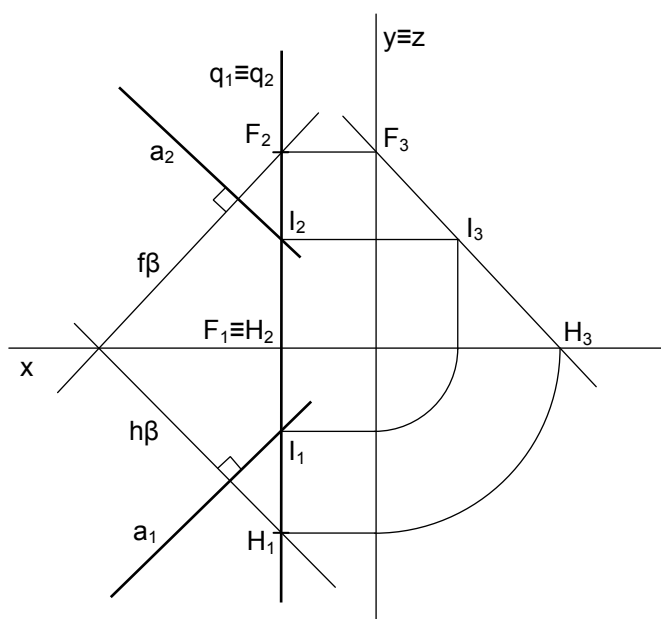
Uma recta oblíqua é perpendicular a uma de perfil quando uma delas é perpendicular a um plano oblíquo que a contém.



Perpendicularidade entre as rectas oblíqua e de perfil enviesadas

A recta de perfil da esquerda é definida pelos seus traços. O plano oblíquo contém essa recta, pelo que qualquer recta que lhe seja perpendicular é também perpendicular à recta de perfil.

A recta de perfil da direita é definida pelos pontos A e B, pelo que se recorre às projecções laterais para determinar os seus traços. Daí em diante procede-se da mesma forma.



Perpendicularidade entre as rectas oblíqua e de perfil concorrentes

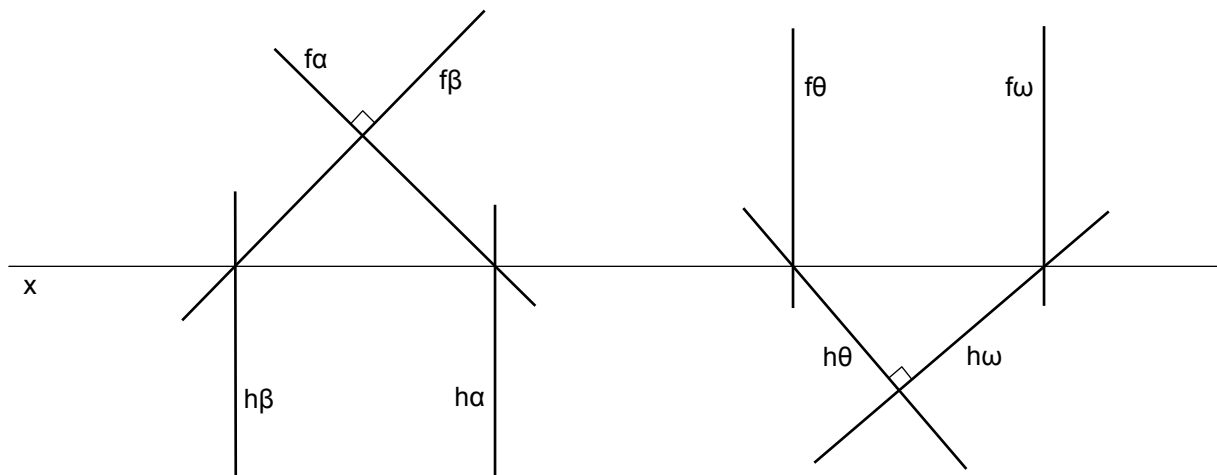
Esta situação apresenta aspectos das duas anteriores. Sendo a recta de perfil definida pelos seus traços, o plano oblíquo que a contém pode traçar-se directamente. Contudo, é necessário recorrer à projecção lateral da recta de perfil para se poder escolher o ponto I, de intersecção com a recta a.

Se a recta de perfil fosse definida por dois pontos que não os traços, procedia-se como no segundo caso de cima, cruzando-se a recta oblíqua com o ponto pretendido.

Perpendicularidades de resolução directa entre planos

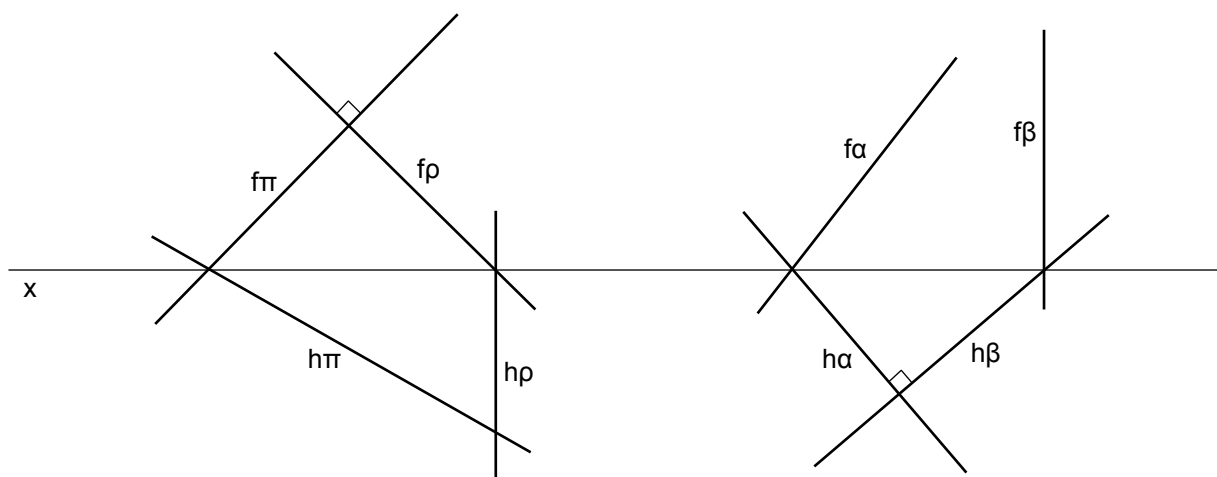
As perpendicularidades entre planos apresentam situações muito diversas. Nesta página mostram-se aquelas que se representam sem recurso a qualquer processo auxiliar.

Há situações em que a perpendicularidade entre planos é imediata, pelo que não se mostram os traçados relativos a essas situações: plano horizontal com os planos de perfil, vertical e frontal; plano frontal com os planos de perfil, horizontal e de topo; plano de perfil com os planos horizontal, frontal e de rampa; plano de rampa com plano de perfil; plano de topo com plano frontal; plano vertical com plano horizontal.



Perpendicularidade entre planos de topo e entre planos verticais

Dois planos de topo são perpendiculares quando os seus traços frontais o são. No caso dos planos verticais, tem de existir perpendicularidade entre os traços horizontais.

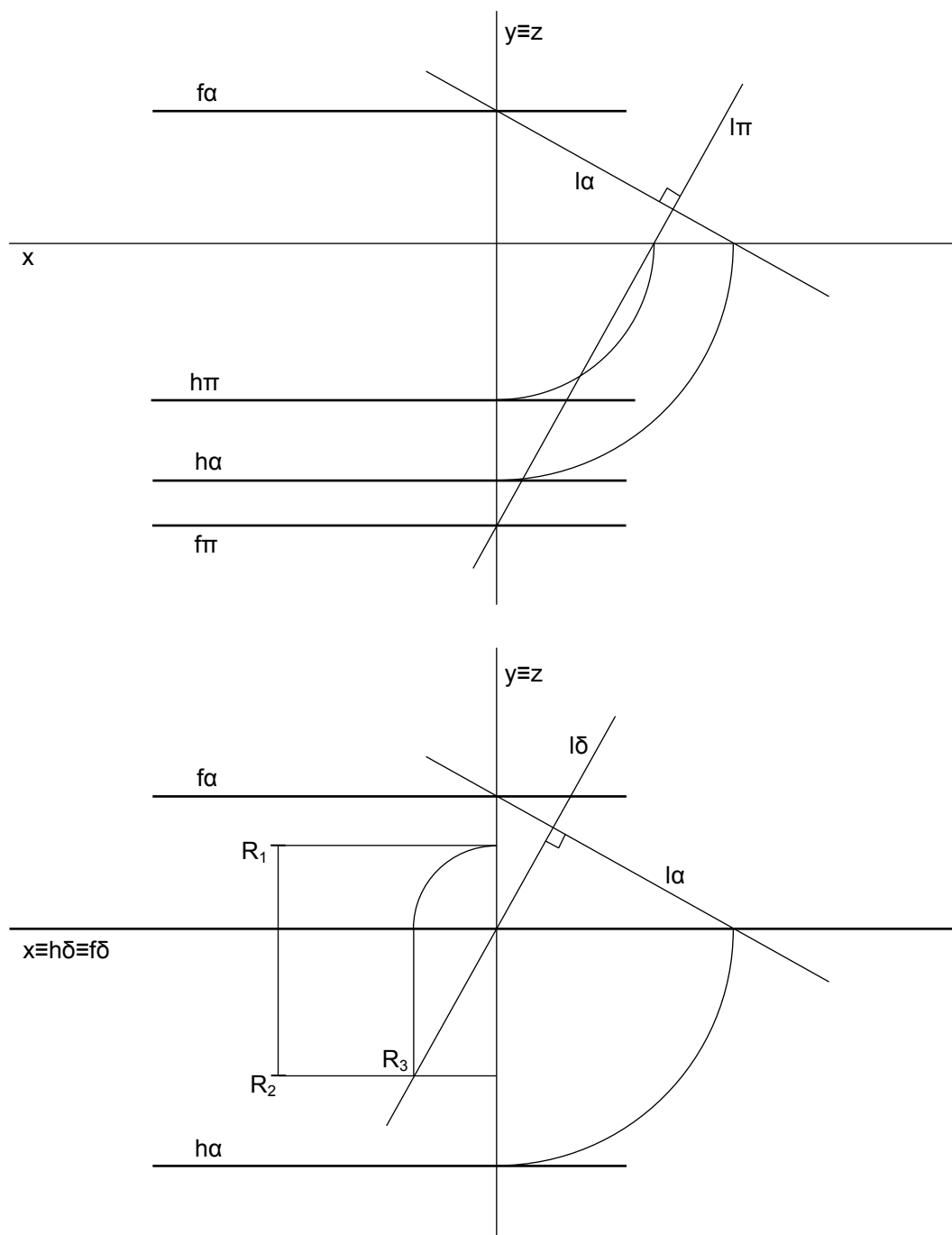


Perpendicularidade entre o plano oblíquo e os planos de topo e vertical

Um plano oblíquo é perpendicular a um plano de topo quando os seus traços frontais o são; é perpendicular a um plano vertical quando os seus traços horizontais o são. O ângulo entre os outros traços é indiferente.

Perpendicularidades entre planos de rampa

Para obter dois planos de rampa perpendiculares recorre-se aqui ao plano lateral de projecção. Podem também ser utilizados os métodos geométricos auxiliares: rebatimentos, rotações ou mudanças de planos.



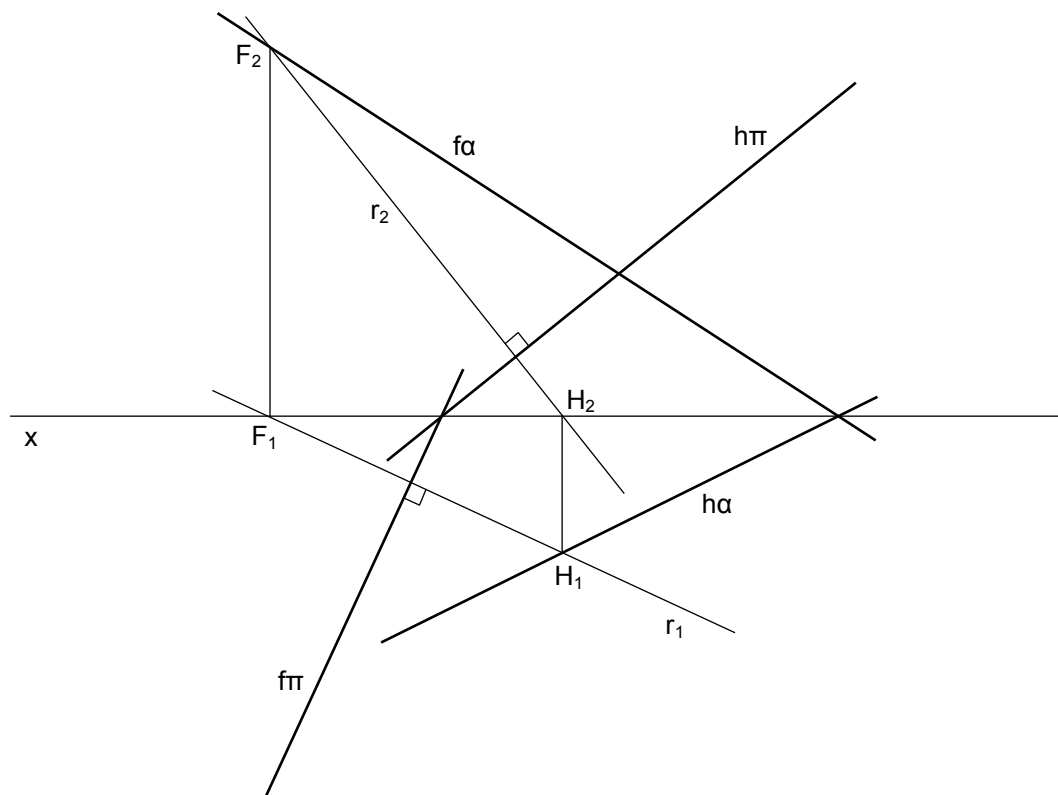
Dois planos de rampa perpendiculares

Para que dois planos de rampa sejam perpendiculares entre si é necessário que os seus traços laterais também sejam perpendiculares.

Na situação de baixo, um dos planos é passante e contém o ponto R.

Perpendicularidade entre planos oblíquos

Para garantir que dois planos oblíquos são perpendiculares entre si, é necessário que um deles contenha uma recta perpendicular ao outro.



Dois planos oblíquos perpendiculares

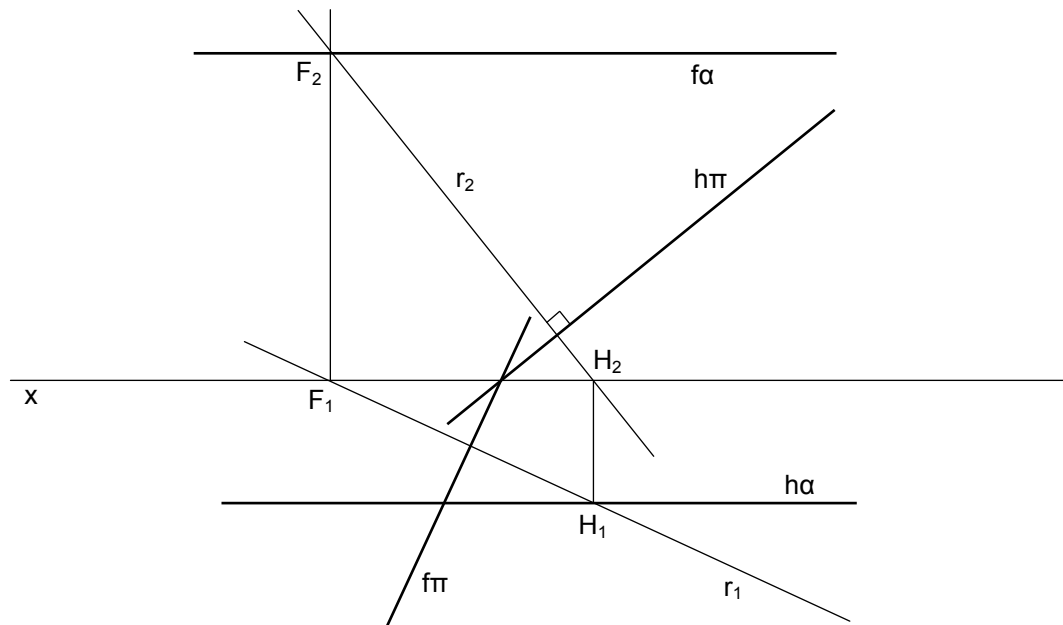
Podemos observar qualquer dos planos como sendo o dado ou o pedido. Se for π o plano dado, traça-se uma recta r perpendicular a ele; o plano α é-lhe perpendicular por conter essa recta. Se for α o plano dado traça-se a recta r que lhe pertence; o plano π é-lhe perpendicular por ser perpendicular a essa recta.

Em ambos os casos é possível traçar um número infinito de planos perpendicular ao outro, caso não se exija qualquer condição ao plano pedido. Se se exigir que um plano contenha um ponto dado, por exemplo, o plano a traçar já terá de ter esse factor em conta.

Estas são duas abordagens a uma situação que, na prática, pode ser utilizada consoante o modo como um enunciado é apresentado.

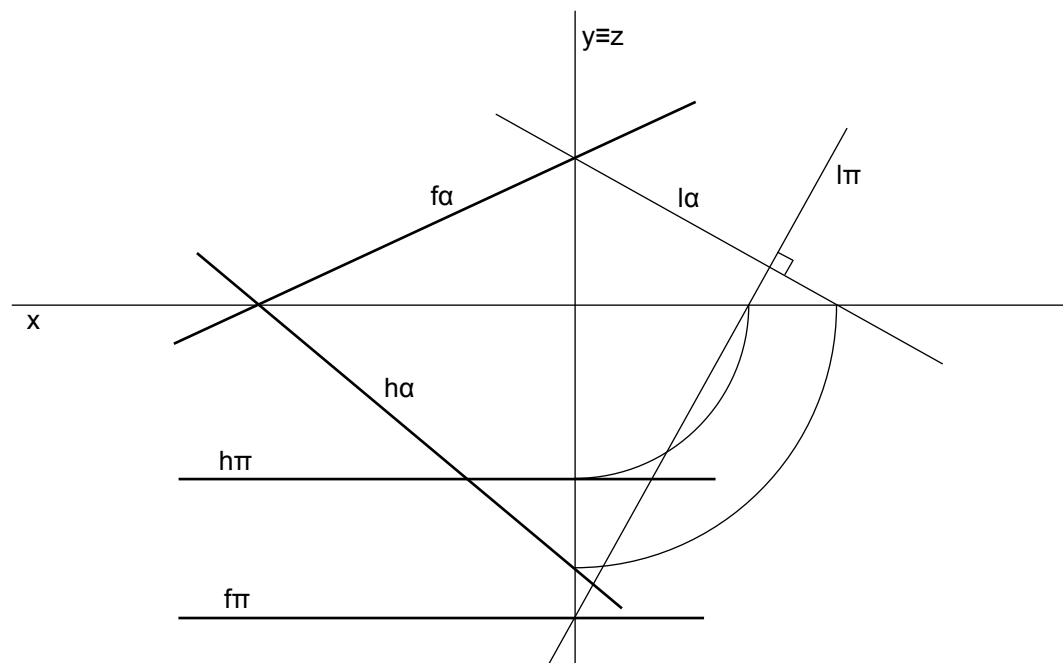
Perpendicularidades entre planos oblíquos e de rampa

Na perpendicularidade entre um plano oblíquo e um plano de rampa seguem-se dois caminhos diferentes, consoante o plano dado seja o oblíquo ou o de rampa.



Plano oblíquo e de rampa perpendiculares, sendo dado o plano oblíquo

Sendo dado o plano oblíquo, o plano de rampa é-lhe perpendicular porque contém a recta r que lhe é perpendicular.

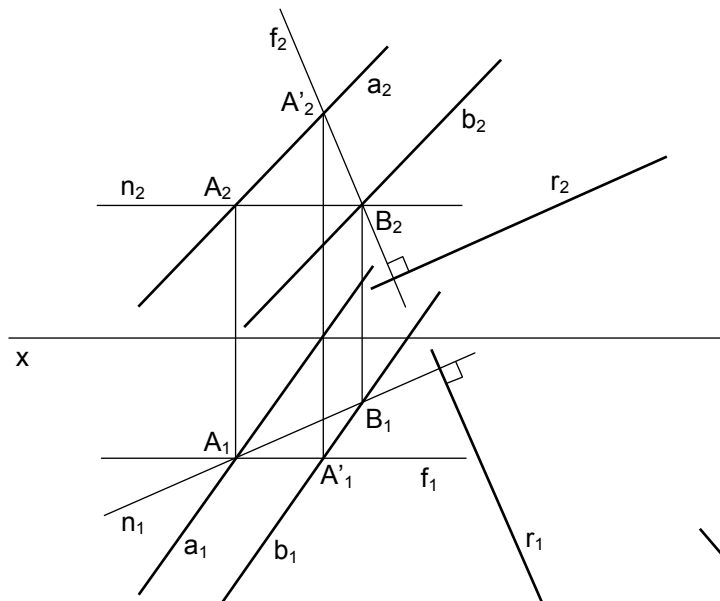


Plano oblíquo e de rampa perpendiculares, sendo dado o plano de rampa

Um plano oblíquo e um plano de rampa perpendiculares entre si têm os seus traços laterais perpendiculares. Também se pode utilizar uma recta de perfil perpendicular ao plano de rampa utilizando, por exemplo, um rebatimento, mas este processo permite simplificar o traçado.

Perpendicularidades entre rectas e planos definidos por rectas

Aqui mostra-se como determinar rectas perpendiculares a planos definidos por rectas, sem recorrer aos traços desses planos.

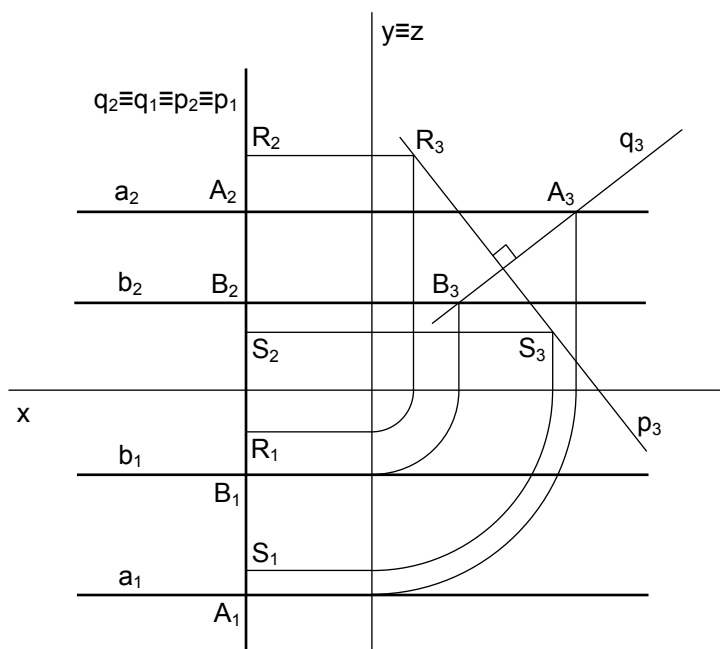
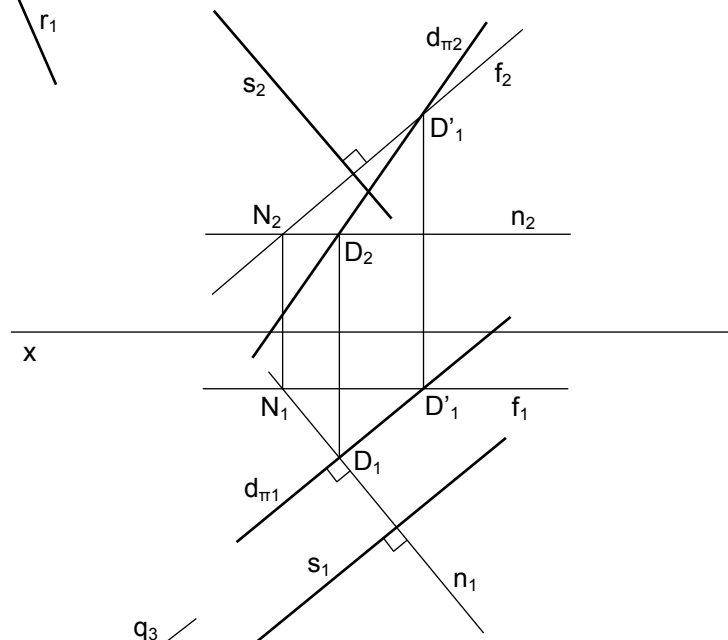


Recta perpendicular a plano definido por rectas oblíquas

Num plano definido por rectas, para saber a direcção de uma recta perpendicular, determina-se uma recta horizontal e outra frontal desse plano. Uma recta perpendicular ao plano deverá ter as suas projecções perpendiculares às projecções inclinadas dessas rectas.

Recta perpendicular a plano definido por recta de maior declive

Como no caso anterior, traça-se uma recta horizontal e outra frontal do plano definido pela recta de maior declive. As projecções da recta pretendida são perpendiculares às projecções inclinadas dessas rectas.

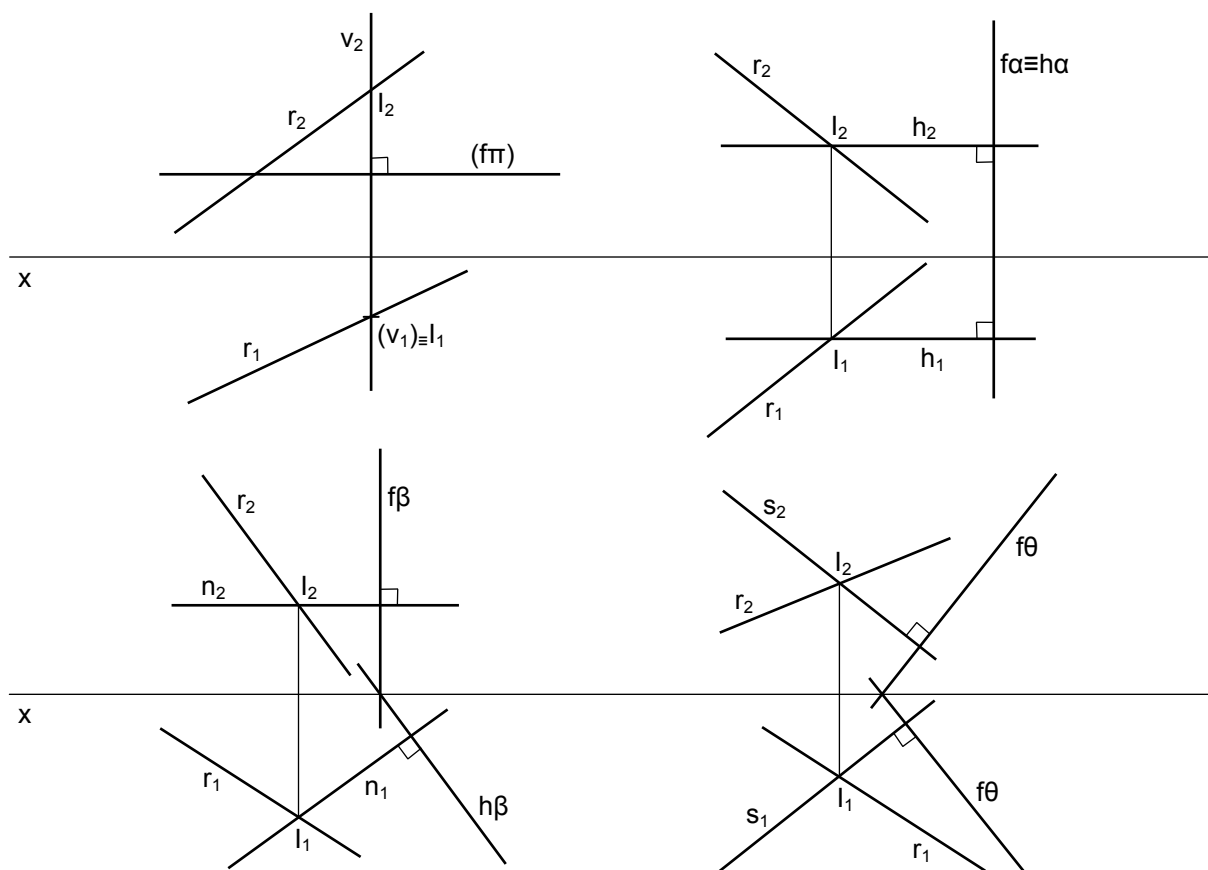


Recta perpendicular a plano definido por rectas fronto-horizontais

Um plano definido por duas rectas fronto-horizontais é de rampa; uma recta perpendicular a esse plano é de perfil. Para a determinar utiliza-se aqui a recta de perfil q, do plano. A recta pretendida, p, terá que ser perpendicular a essa, o que se confirma na projecção lateral.

Perpendicularidades entre planos definidos pelos traços e planos definidos por rectas

As situações de perpendicularidade entre um plano definido pelos traços e outro definido por duas rectas são, de um modo geral, simples. Mostram-se aqui vários exemplos.

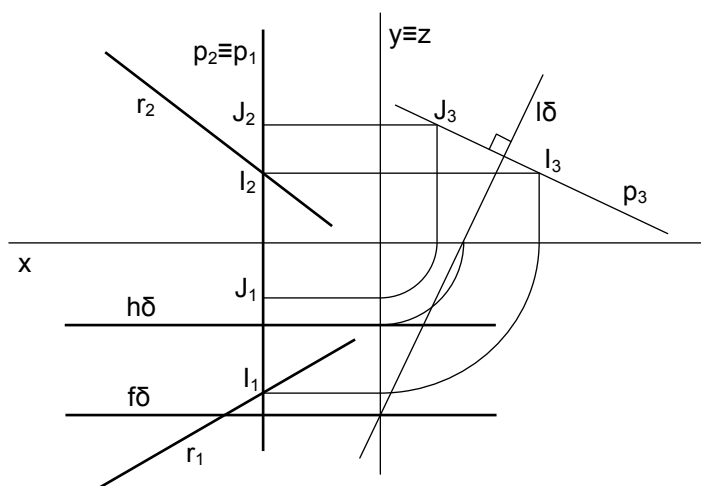


Situações genéricas de perpendicularidades entre rectas e planos definidos por rectas

Estas situações mostram planos diferentes mas têm resoluções idênticas, pois basta que uma das rectas seja perpendicular ao plano definido pelos traços para que os planos sejam perpendiculares entre si. A recta r que surge em todos os casos pode-se representar de forma aleatória.

Nestes exemplos são rectas concorrentes que definem um plano, mas também se pode optar por paralelas.

Caso se pretenda um plano em que um dos traços faça um ângulo preciso, acrescenta-se no plano definido pelas rectas uma outra que tenha uma projecção perpendicular à do traço pretendido.



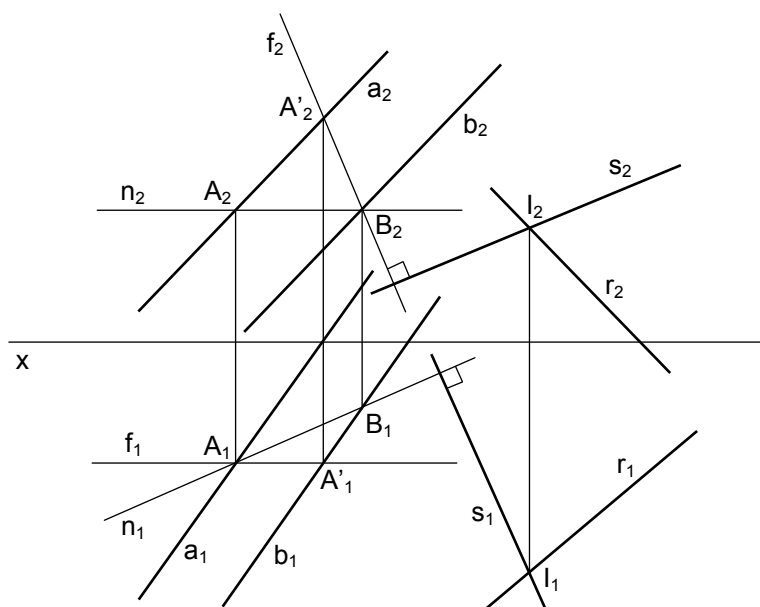
Situação específica de perpendicularidade entre uma recta e um plano definido por rectas

Com o plano de rampa é necessário confirmar a sua perpendicularidade com uma recta de perfil do outro plano. Aqui faz-se isso recorrendo ao traço lateral do plano de rampa. A recta r não interfere com o exercício.

Perpendicularidades entre planos definidos por rectas

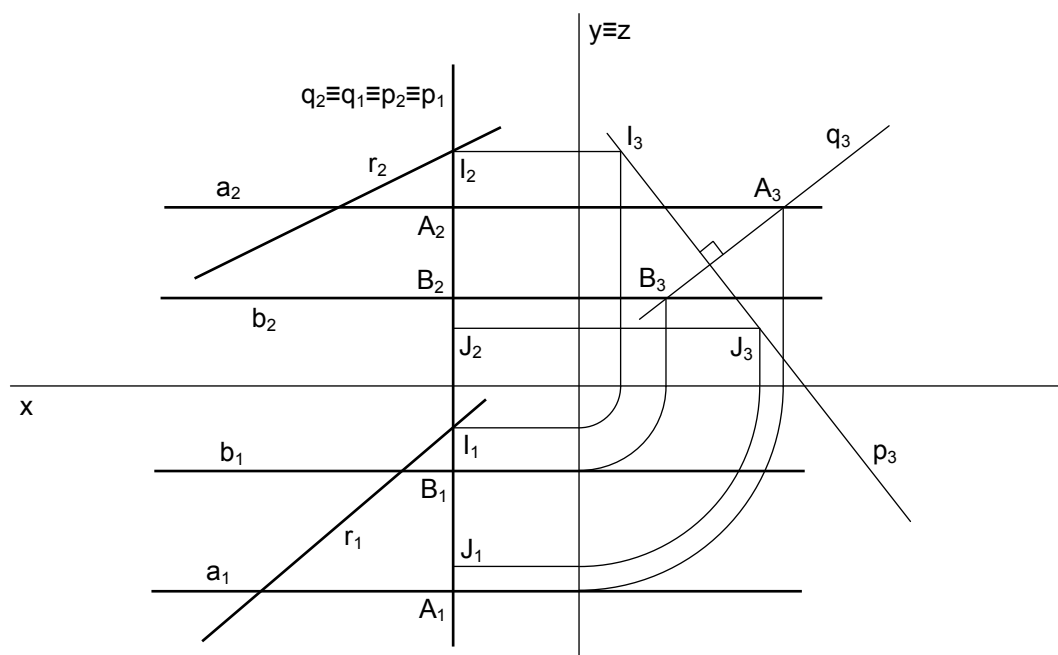
Mostra-se aqui como se representam planos perpendiculares entre si, ambos definidos por rectas. Trata-se de situações cujas resoluções são idênticas às utilizadas em exercícios das páginas precedentes, pelo que se aconselha comparar os traçados desta com os dessas páginas.

Se num enunciado um plano se apresenta definido por três pontos, traçam-se por eles duas rectas concorrentes ou paralelas.



Situação genérica de perpendicularidade entre planos definidos por rectas

Partindo do plano definido pelas rectas paralelas, determinou-se uma recta horizontal e outra frontal, por terem a direcção dos traços do plano a que pertencem. O outro plano basta ter uma recta perpendicular a este. A outra recta, r neste caso, tem uma posição aleatória, podendo até ser paralela à recta s .

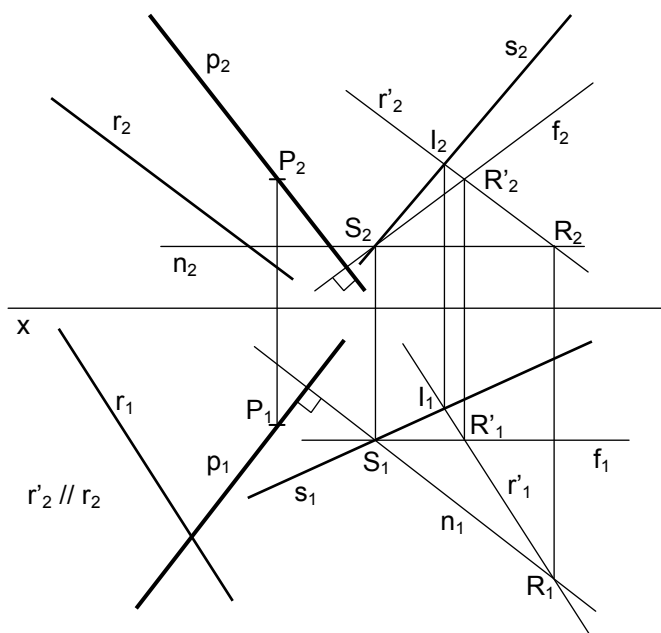


Situação específica de perpendicularidade entre planos definidos por rectas

Um plano definido por duas rectas fronto-horizontais é um plano de rampa; uma recta perpendicular a esse plano é de perfil. Para a determinar utiliza-se aqui a recta de perfil q , do plano. A recta pretendida, p , terá que ser perpendicular a essa, o que se confirma na projecção lateral. A recta r tem uma posição aleatória.

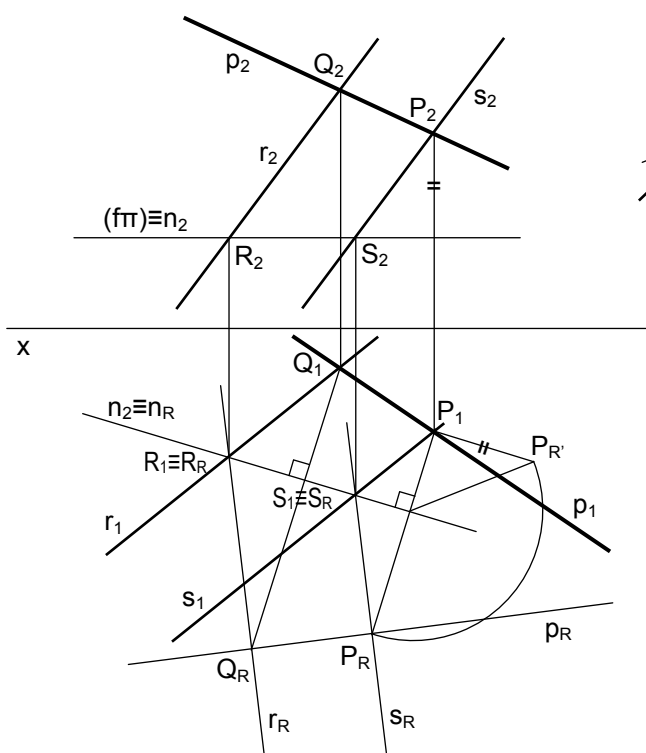
Perpendicularidades entre uma recta e duas rectas

Mostram-se aqui três exemplos de uma recta perpendicular a duas. Em dois dos casos, a recta é também concorrente com as rectas dadas.



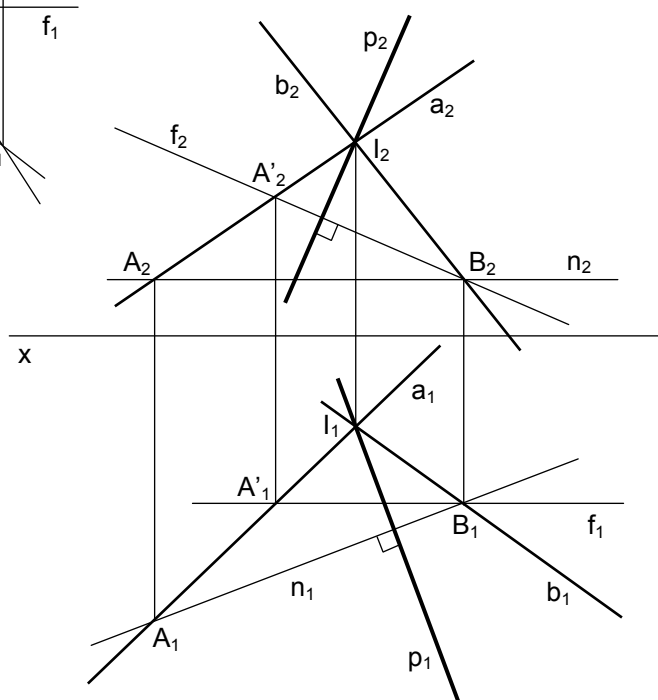
Recta perpendicular e concorrente com duas rectas concorrentes

Este exercício é uma situação específica de perpendicularidade entre uma recta e um plano definido por duas rectas concorrentes, com a particularidade de a recta pedida ter de cruzar as outras (o mesmo que dizer o plano definido pelas outras) no seu ponto de intersecção.



Recta perpendicular a duas rectas enviesadas

Para traçar uma recta perpendicular às rectas r e s , passando pelo ponto P , procedeu-se do seguinte modo: cruzou-se por s a recta r' paralela a s ; traçaram-se as rectas frontal f e horizontal n do plano definido por s e r' . Sendo a recta p perpendicular a esse plano, é também perpendicular às rectas r e s .



Recta perpendicular e concorrente com duas rectas paralelas

Aqui rebate-se o plano definido pelas duas rectas. No rebatimento traça-se a recta que lhes é perpendicular. Optou-se por cruzar a recta pedida com a recta s no ponto P (com que se fez o rebatimento) para poupar traçado. Essa recta cruza r no ponto Q , que se contra-rebate com uma linha perpendicular à charneira.

Paralelismos e perpendicularidades – Exercícios

Paralelismos entre duas rectas

1. Representar a recta r que contém $R(3;2;3)$, é paralela ao $\beta_{2/4}$, fazendo a sua projecção frontal 60° ad. Determinar a recta s , que contém $P(-1;0;0)$ e é paralela a r .
2. Representar a recta p , que contém os pontos $A(2;-2;-2)$ e $B(2;-5;3)$. Determinar a recta q , que tem $F(4;0;4)$ como traço frontal e é paralela a p .
3. Representar a recta b , que é paralela ao $\beta_{1/3}$ e contém o ponto $P(2;-3;-1)$, fazendo a sua projecção frontal 40° ae. Determinar a recta g , que contém o ponto $T(2;1;3)$ e é paralela a b .

Paralelismos entre dois planos

4. Representar o plano vertical θ , que cruza o eixo x num ponto com 3cm de abcissa e faz 50° ad. Determinar o plano β , que contém $P(1;-2;3)$ e é paralelo a θ .
5. Representar o plano π , que cruza o eixo x num ponto com 2cm de abcissa, fazendo os seus traços frontal e horizontal 45° ae e 65° ad, respectivamente. Determinar o plano ψ , que contém $M(-2;3;2)$ e é paralelo a π .
6. Representar o plano α , que cruza o eixo x no ponto de abcissa nula, fazendo os seus traços frontal e horizontal 60° ad e 45° ad, respectivamente. Determinar o plano ρ , que contém $R(0;2;4)$ e é paralelo a α .
7. Representar o plano α do exercício anterior. Determinar o plano σ , que contém $K(4;2;-2)$ e é paralelo a α .
8. Representar o plano σ , perpendicular ao $\beta_{1/3}$, que cruza o eixo x num ponto com -3cm de abcissa, fazendo o seu traço horizontal 40° ae. Determinar o plano θ , que contém $A(6;2;2)$ e é paralelo a σ .
9. Representar o plano σ do exercício anterior. Determinar o plano δ , que contém $B(2;-2;-2)$ e é paralelo a σ .
10. Representar o plano θ , perpendicular ao $\beta_{2/4}$, que cruza o eixo x num ponto com 1cm de abcissa, fazendo o seu traço frontal 40° ae. Determinar o plano σ que contém $R(1;-2;2)$ e é paralelo a θ .
11. Representar o plano passante ω , que contém $T(4;-3;4)$. Determinar o plano δ que contém $A(2;2;2)$ e é paralelo a ω .
12. Representar o plano π , perpendicular ao $\beta_{2/4}$, tendo o seu traço frontal 2cm de cota. Determinar o plano ρ que contém $S(3;3;-1)$ e é paralelo a π .

Paralelismos entre uma recta e um plano

13. Representar o plano de topo ψ , que faz 55° ae, cruzando o eixo x num ponto com -2cm de abcissa. Determinar a recta r , que contém $P(0;1;-3)$ e é paralela a ψ e ao $\beta_{2/4}$.
14. Representar o plano vertical α , que faz 60° ad e cruza o eixo num ponto com 3cm de abcissa. Determinar a recta s , que contém $A(-1;-1;3)$, é passante e paralela a α .
15. Representar o plano α do exercício anterior. Determinar a recta horizontal n , que é paralela a α e contém $N(3;-3;3)$.
16. Representar o plano ω , que cruza o eixo x no ponto de abcissa nula, fazendo os seus traços frontal e horizontal 45° ae e 55° ae, respectivamente. Determinar a recta s , que contém $S(-3;-1;3)$, é paralela a ω , fazendo a sua projecção frontal 30° ad.
17. Representar o plano ω e o ponto S do exercício anterior. Determinar a recta r , que contém S e é paralela às rectas de maior declive de ω .
18. Representar o plano ρ , que cruza o eixo x num ponto com 3cm de abcissa, fazendo os seus traços frontal e horizontal 60° ae e 30° ad, respectivamente. Determinar a recta a , que contém o ponto $A(0;3;3)$ e é paralela ao plano ρ , fazendo a sua projecção frontal 45° ad.
19. Representar o plano ρ do exercício anterior. Determinar a recta de perfil p , paralela ao plano dado e passante no ponto de abcissa 6.
20. Representar o plano π , perpendicular ao $\beta_{2/4}$, que cruza o eixo x num ponto com -2cm de abcissa, cujo traço frontal faz 60° ad. Determinar a recta frontal f , que contém $B(2;-2;-3)$ e é paralela a π .
21. Representar o plano π do exercício anterior. Determinar a recta u , que contém $D(3;0;3)$ e é paralela a π e ao $\beta_{2/4}$.
22. Representar o plano θ , cujos traços frontal e horizontal têm, respectivamente, 2cm de cota e 4cm de afastamento. Determinar a recta b , passante em P com 5cm de abcissa, paralela a θ , fazendo a sua projecção horizontal 45° ae.
23. Representar o plano θ do exercício anterior. Determinar a recta de perfil q , que contém $Q(4;4;2)$ e é paralela a θ .
24. Representar o plano ψ , cujos traços frontal e horizontal têm, respectivamente, -4cm de cota e 2cm de afastamento. Determinar a recta g que contém $R(3;-2;2)$, é paralela a ψ , fazendo a sua projecção frontal 50° ad.

Paralelismos entre uma recta e um plano definido por rectas ou pontos

25. Representar o plano δ definido pelas rectas frontais a e b , paralelas entre si, contendo, respectivamente, os pontos $A(0;5;2)$ e $B(2;3;4)$, fazendo 35° ad. Determinar a recta r , que contém $R(-4;-1;-1)$ e é paralela a δ , fazendo a sua projecção frontal 25° ae.

26. Representar o plano δ do exercício anterior. Determinar a recta horizontal n , paralela a δ , com traço no ponto $F(-1;0;-2)$.

27. Representar o plano δ do exercício 25. Determinar a recta de perfil p , paralela a δ , com -3 cm de abcissa.

28. Representar o plano β , definido pelo ponto $P(1;1;4)$ e pela recta r , que contém $R(4;-1;5)$, fazendo as suas projecções frontal e horizontal 40° ad e 50° ae, respectivamente. Determinar a recta a , paralela a β , contendo $A(3;3;1)$ e fazendo a sua projecção frontal 45° ae.

29. Representar o plano β do exercício anterior. Determinar a recta de perfil q , com 4 cm de abcissa e paralela a β .

30. Representar o plano β do exercício 28. Determinar a recta de perfil p , com 4 cm de abcissa, paralela a β , cujo traço horizontal é $H(6;4;0)$.

Paralelismos entre dois planos definidos por rectas ou pontos

31. Representar o plano α , definido pelas rectas r e s , concorrentes em $I(3;3;4)$, sendo r paralela ao $\beta_{2/4}$, fazendo a sua projecção horizontal 50° ae, e sendo s horizontal fazendo 50° ad. Determinar o plano σ , paralelo a α , definido pelas rectas a e b , concorrentes em $P(-4;4;2)$, sendo a frontal e b oblíqua.

32. Representar o plano δ , definido pelas rectas frontais a e b , paralelas entre si, contendo, respectivamente, os pontos $A(0;5;2)$ e $B(2;3;4)$, fazendo 35° ad. Determinar o plano ρ , paralelo a δ , definido pelas rectas c e d , oblíquas e concorrentes no ponto $M(-5;3;4)$.

33. Representar o plano ω , definido pelos pontos $A(0;0;3)$, $B(-3;4;1)$ e $C(-5;1;5)$. Determinar o plano π , paralelo a ω , definido pelas rectas oblíquas r e s , concorrentes em $P(4;2;2)$.

34. Representar o plano ω do exercício anterior. Determinar o plano ψ , paralelo a ω , definido pelas rectas f e n , frontal e horizontal, concorrentes em $S(4;-3;-3)$.

35. Representar o plano ω do exercício 33. Determinar o plano δ , paralelo a ω , definido pelas rectas de perfil p e q , respectivamente com 5 cm e 3 cm de abcissa.

Perpendicularidades entre uma recta e um plano

36. Representar o plano de topo σ , que cruza o eixo x num ponto com 2 cm de abcissa, fazendo 35° ad. Determinar a recta r , perpendicular a σ e contendo $P(2;2;-4)$.

37. Representar o plano vertical α , que cruza o eixo x num ponto com -3 cm de abcissa, fazendo 55° ae. Determinar a recta s , perpendicular a α e contendo $A(1;-2;2)$.

38. Representar o plano ρ , que cruza o eixo x num ponto com -3 cm de abcissa, fazendo os seus traços frontal e horizontal 65° ad e 40° ae, respectivamente. Determinar a recta a , perpendicular a ρ e contendo $N(-1;1;-4)$.

39. Representar o plano ρ do exercício anterior. Determinar a recta b , perpendicular a ρ , passante em R , com -3 cm de abcissa.

40. Representar o plano π , que cruza o eixo x num ponto com -2 cm de abcissa, fazendo os seus traços frontal e horizontal 45° ad e 30° ad, respectivamente. Determinar a recta a , perpendicular a π e passante em P , com 3 cm de abcissa.

41. Representar o plano θ , cujos traços frontal e horizontal têm, -3 cm de afastamento e 4 cm de cota, respectivamente. Determinar a recta r , perpendicular a θ e contendo $R(4;3;3)$.

Perpendicularidades entre duas rectas

42. Representar a recta horizontal n , que contém o ponto $M(2;4;-1)$ fazendo 25° ae. Determinar a recta oblíqua r , que contém M , é perpendicular a n e paralela ao $\beta_{1/3}$.

43. Representar a recta frontal f , que contém o ponto $T(2;3;-1)$, fazendo a sua projecção frontal 60° ae. Determinar a recta oblíqua s , que contém $N(-3;-1;4)$, é perpendicular a f e paralela ao $\beta_{2/4}$.

44. Representar a recta r , que contém os pontos $A(2;4;-1)$ e $B(2;2;3)$. Determinar a recta p , perpendicular a r e passante em P , com 5 cm de abcissa.

45. Representar a recta r do exercício anterior. Determinar a recta s , passante num ponto com 3 cm de abcissa, sendo perpendicular a r e fazendo a sua projecção frontal 50° ae.

46. Representar a recta b que contém $S(0;2;3)$ e $T(-2;4;5)$. Determinar a recta j , que contém T e é perpendicular a b , fazendo a sua projecção frontal 35° ae.

47. Representar a recta c , que contém $V(5;-1;4)$ e $Z(1;5;2)$. Determinar a recta de perfil k , perpendicular a c e passante em P , com $2,5$ cm de abcissa.

48. Representar a recta c do exercício anterior. Determinar a recta d , perpendicular a c , contendo $C(2;1;0)$ e fazendo a sua projecção frontal 25° ae.

Perpendicularidades entre planos

49. Representar o plano de topo ψ , que cruza o eixo x num ponto com -2cm de abcissa e faz 50°ae . Determinar o plano de topo ω , que contém $P(3;-3;1)$ e é perpendicular a ψ .

50. Representar o plano ψ do exercício anterior. Determinar o plano oblíquo δ , que contém $R(5;2;1)$, é perpendicular a ψ e ao $\beta_{1/3}$.

51. Representar o plano σ , que cruza o eixo x num ponto com 3cm de abcissa, fazendo os seus traços frontal e horizontal 65°ae e 35°ad , respectivamente. Determinar o plano α , perpendicular a σ , que contém $S(2;2,5;2)$, fazendo o seu traço frontal 40°ae .

52. Representar o plano σ e o ponto S do exercício anterior. Determinar o plano π , que contém S , é perpendicular a σ e ao $\beta_{2/4}$.

53. Representar o plano ρ , cujos traços frontal e horizontal têm -3cm de cota e 2cm de afastamento, respectivamente. Determinar o plano oblíquo θ , que contém o ponto $K(3;3;2)$, é perpendicular a ρ , fazendo o seu traço horizontal 70°ad .

54. Representar o plano ρ do exercício anterior. Determinar o plano passante ω , perpendicular a ρ .

Perpendicularidades entre rectas e planos definidos por rectas ou pontos

55. Representar o plano δ , definido pelos pontos $A(0;2;1)$, $B(-3;2;4)$ e $C(-5;5;2,5)$. Determinar a recta r que contém $P(4;-2;5)$ e é perpendicular a δ .

56. Representar o plano ψ , definido pelas rectas a e b , paralelas ao $\beta_{2/4}$, que contém, respectivamente, os pontos $A(3;6;1)$ e $B(1;3;2)$, fazendo as suas projecções frontais 40°ae . Determinar a recta s , perpendicular a ψ e passante no ponto Q com -2cm de abcissa.

57. Representar o plano α , definido pela recta d_α , que contém o ponto $L(1;3;1)$, fazendo as suas projecções frontal e horizontal 55°ad e 45°ae , respectivamente. Determinar a recta b , que contém L e é perpendicular a α .

58. Representar o plano de rampa σ , definido pelos pontos $R(6;5;-2)$ e $S(2;2;3)$. Determinar a recta q , perpendicular a σ e passante em A , com 4cm de abcissa.

59. Representar o plano passante π , definido pela recta r , passante no ponto P com 6cm de abcissa, fazendo as suas projecções frontal e horizontal 55°ad e 40°ad , respectivamente. Determinar a recta p , perpendicular a π e contendo $Z(6;-2;6)$.

60. Representar o plano passante θ , definido pela recta de perfil b , que contém $P(3;3;2)$. Determinar a recta g , que é perpendicular a θ e contém P .

Perpendicularidades entre planos definidos por traços e planos definidos por rectas ou pontos

61. Representar o plano ω , perpendicular ao $\beta_{1/3}$, que cruza o eixo x num ponto com 2cm de abcissa, fazendo o seu traço horizontal 50°ae . Determinar o plano ρ , definido por duas rectas oblíquas r e s , que contém o ponto $P(-1;4;3)$ e é perpendicular a ω .

62. Representar o plano ω do exercício anterior. Determinar o plano δ , passante e perpendicular a ω , definido por uma recta oblíqua b e pelo eixo x .

63. Representar o plano ψ , cujos traços frontal e horizontal têm 3cm de cota e 5cm de afastamento, respectivamente. Determinar o plano α , perpendicular a ψ , definido pela recta de perfil p e por uma recta oblíqua r , concorrentes em $A(4;5;3)$.

64. Representar o plano ψ e o ponto A do exercício anterior. Determinar o plano σ , perpendicular a ψ , definido pelas rectas fronto-horizontais a , que contém P , e b , que dista 2cm de a .

Perpendicularidades entre planos definidos por rectas ou pontos

65. Representar o plano δ , definido pelos pontos $A(0;2;1)$, $B(-3;2;4)$ e $C(-5;5;2,5)$. Determinar o plano θ , perpendicular a δ , definido pelas rectas r , oblíqua que contém $P(4;-2;5)$, e s , paralela a r .

66. Representar o plano δ e o ponto P do exercício anterior. Determinar o plano β , perpendicular a δ , definido pelas rectas oblíqua e de perfil, respectivamente r e p , concorrentes em P .

67. Representar o plano ω , definido pelas rectas a e b , paralelas ao $\beta_{2/4}$, que contém, respectivamente, os pontos $A(3;6;1)$ e $B(1;3;2)$, fazendo as suas projecções frontais 40°ae . Determinar o plano ρ , perpendicular a ω , definido pelas rectas s , oblíqua, e h , fronto-horizontal, concorrentes em $C(-4;5;3)$.

Perpendicularidades entre uma recta e duas rectas

68. Representar o plano ω do exercício anterior. Determinar a recta p , perpendicular e concorrente com as rectas dadas do plano, com a recta a no seu ponto com 3cm de cota.

69. Representar o plano α , definido pelas rectas k e j , concorrentes em $A(3;4;6)$. As projecções frontal e horizontal de k fazem 65°ae e 30°ae , as de j fazem 35°ae e 40°ad , respectivamente. Determinar a recta r , perpendicular a α , sendo concorrente com k e j .

70. Representar as rectas r e s . A primeira contém o ponto $R(-3;3;3)$, fazendo as suas projecções frontal e horizontal 35°ad e 45°ae , respectivamente; a segunda contém o ponto $S(5;4;5)$, fazendo as suas projecções frontal e horizontal 60°ae e 35°ad , respectivamente. Determinar a recta m , que contém $M(1;3;4)$ e é perpendicular a r e a s .